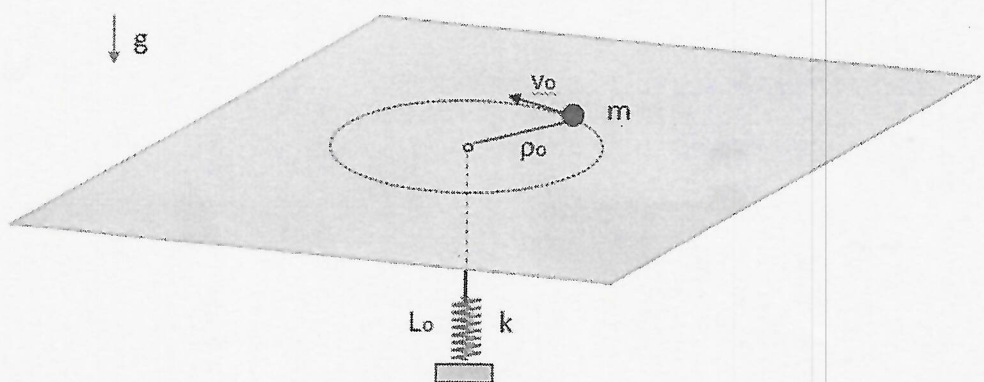
MECÁNICA (FI 2001-4) **EXAMEN** Fecha: 10 de julio 2025

Profesor Patricio Aceituno; Profesores auxiliares: Fernanda Padró, Gaspar de la Barrera; Álvaro Cifuentes
Ayudantes: Constanza Rodríguez; Luis Painemal

Problema 1. Una partícula de masa **m** se mueve sin roce sobre una plataforma horizontal. La partícula se encuentra atada a una cuerda inextensible cuyo otro extremo está unido a un resorte de largo natural $\mathbf{L_o}$ y constante elástica **k**. a través de un agujero en la plataforma (ver figura adjunta). Estando la cuerda extendida, el resorte en su largo natural y la partícula ubicada a una distancia ρ_o del agujero se la impulsa con velocidad $\mathbf{v_o}$ en dirección perpendicular a la cuerda.

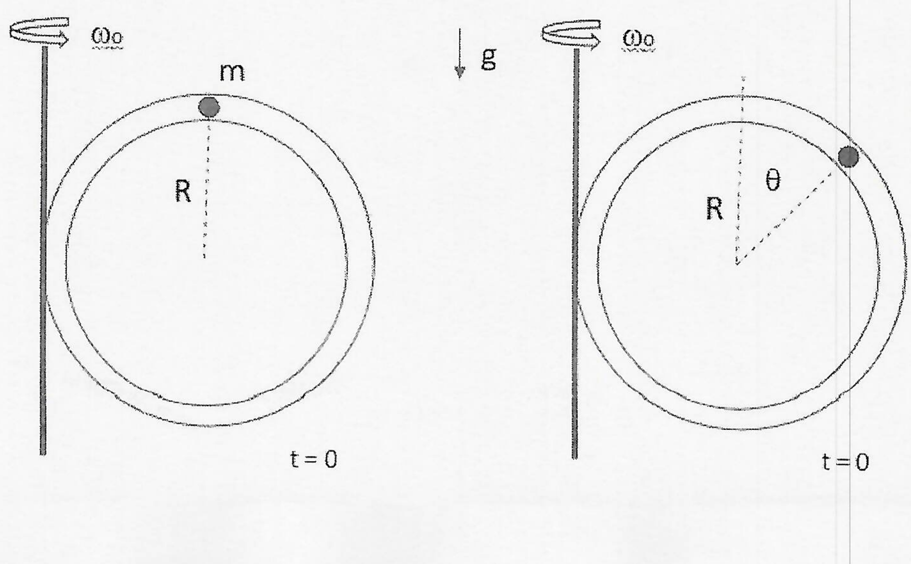
Si se observa que en el movimiento resultante la partícula alcanza un máximo alejamiento del agujero igual a 2 ρ_o determine lo siguiente.

a) Magnitud de la velocidad $\mathbf{v_o}$
b) Velocidad de la partícula en el punto de máximo alejamiento.
c) Aceleración de la partícula en el punto de máximo alejamiento



Problema 2. Por el interior de un tubo cerrado de forma circular de radio **R** se puede desplazar sin roce una partícula de masa **m**. El tubo gira con velocidad angular constante ω_o alrededor de un eje vertical adosado al tubo (ver figura). La partícula se libera desde el reposo en la posición más alta en el interior del tubo.

a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula en el interior del tubo ($d^2\theta/dt^2$ en función del ángulo θ) (2 pts)
b) Determine la rapidez de la partícula en el interior del tubo (rapidez relativa) y su la rapidez con respecto a un sistema fijo exterior cuando pasa por el punto en el cual $\theta = 90°$ (2 pts)
c) Calcule la fuerza que el tubo ejerce sobre la partícula en esa posición ($\theta = 90°$) (2 pts)



Problema 3. Una placa cuadrada de lado **L** y masa **M** tiene adherida tres partículas de masa **m** c/u en la posición central de tres de sus bordes (ver figura adjunta). La estructura puede girar sin roce alrededor de un eje horizontal, perpendicular a la placa que pasa por su centro. En $t = 0$ la estructura se libera desde el reposo, en la posición indicada en la figura.

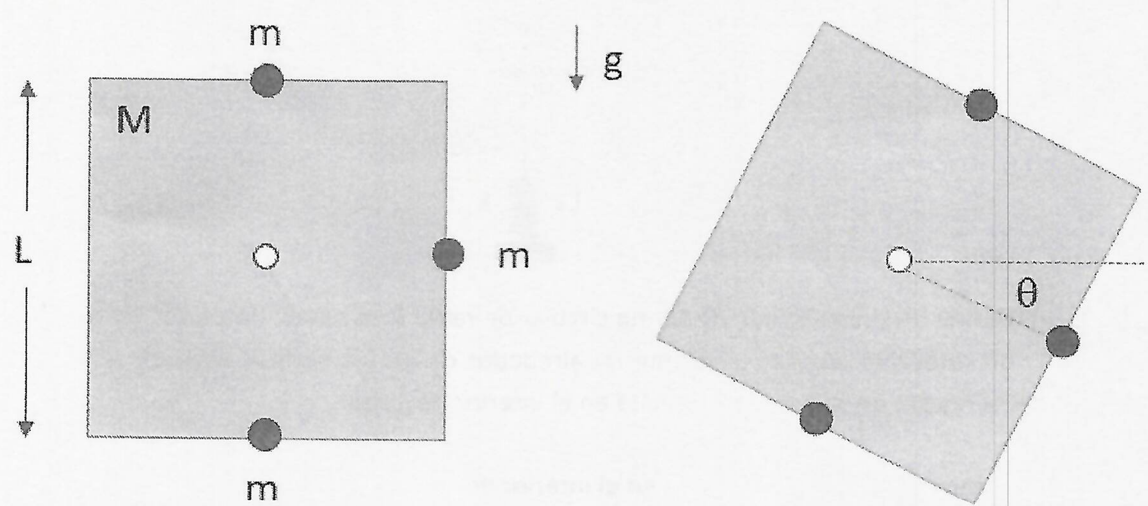
Calcular:

a) Aceleración angular de la estructura justo en el momento que se libera (1 pt)

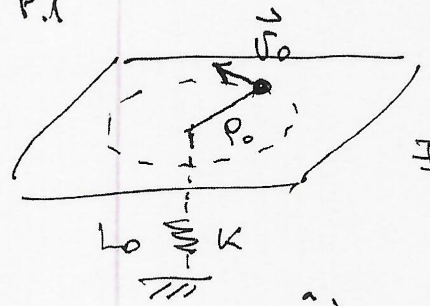
b) Fuerza que el eje ejerce sobre la estructura cuando ésta ha girado en un ángulo $\theta = \pi/4$ (4 pts)

c) Periodo de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio de la estructura

Nota: considere $M = 3\,m$; $I_{cm} = 1/12\, M L^2$ (momento de inercia de la placa de lado L alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por su centro



P.1



$t=0 \quad \vec{\rho} = \rho_0\hat{\rho} \qquad \vec{v} = v_0\hat{\theta}$

Ec. mov $\quad \hat\rho)\ m(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2) = -k(\rho-\rho_0)$

$\hat\theta)\quad \rho^2\dot\theta = \rho_0 v_0$

$$\hat\rho)\ m\ddot\rho = -k(\rho-\rho_0) + m\rho\frac{(\rho_0 v_0)^2}{\rho^4}$$

$$\hat\rho)\ m\int_0^0 \dot\rho\, d\dot\rho = -k\int_{\rho_0}^{2\rho_0}(\rho-\rho_0)\,d\rho + m\rho_0^2v_0^2\int_{\rho_0}^{2\rho_0}\frac{d\rho}{\rho^3}$$

$$0 = -k\frac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2\Big|_{\rho_0}^{2\rho_0} + m\rho_0^2v_0^2\left(-\frac{1}{2\rho^2}\right)\Big|_{\rho_0}^{2\rho_0}$$

$$k\rho_0^2 = m\cancel{\rho_0^2}v_0^2\left(\frac{1}{\cancel{\rho_0^2}} - \frac{1}{(2\cancel{\rho_0})^2}\right) = \frac{3}{4}m v_0^2$$

a) $\quad \therefore \boxed{v_0^2 = \frac{4}{3}\frac{k}{m}\rho_0^2}$

b) CONSERVACION DE MOMENTUM ANGULAR

$$\rho^2\dot\theta = \rho_0 v_0 \rightarrow \rho\dot\theta = \frac{\rho_0 v_0}{\rho} \quad \text{en } \rho = 2\rho_0 \quad \boxed{v = \frac{v_0}{2}}$$

c) $\quad m\vec{a} = -T\hat\rho$

En $\rho = 2\rho_0 \qquad T = +k(2\rho_0-\rho_0) = +k\rho_0$

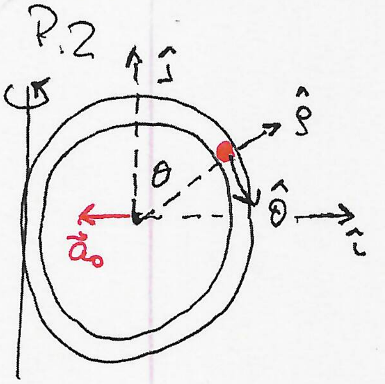
$$\therefore \boxed{\vec{a} = -\frac{k}{m}\rho_0\hat\rho}$$

b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA, CONS. DE ENERGÍA

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\delta_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow v^2 = v_0^2 - \frac{k}{m}\delta_0^2$$

$$v^2 = \frac{4}{3}\frac{k}{m}\rho_0^2 - \frac{k}{m}\delta_0^2 \rightarrow v^2 = \frac{1}{3}\frac{k}{m}\rho_0^2 \rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

P.2



$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + (-m\vec{a}_0) + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}_0 + m(\vec{\omega}_0\times\vec{r}')\times\vec{\omega}_0$$

$$\vec{a}' = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$-m\vec{a}_0 = m\omega_0^2 R\hat{i} \qquad m\vec{g} = -mg\hat{j}$$

$$\hat{i} = \text{sen}\,\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$

$$\hat{j} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{\omega}_0 = \cancel{\omega_0\hat{k}}\ \omega_0\hat{j}$$

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0(\cos\theta\,\hat{\rho} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta})$$

$$\therefore\ -m\vec{a}_0 = m\omega_0^2 R(\text{sen}\,\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta})$$

$$m\vec{g} = mg(\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{\rho})$$

$$\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

F.COR.: $2m\vec{v}'\times\vec{\omega}_0 = 2mR\dot{\theta}\,\hat{\theta}\times\omega_0(\cos\theta\,\hat{\rho} - \text{sen}\,\theta\,\hat{\theta})$

$$= 2mR\dot{\theta}\omega_0\cos\theta\,\hat{k}$$

F.CENT. $m(\vec{\omega}_0\times\vec{r}')\times\vec{\omega}_0 = m\omega_0^2 R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{i} = m\omega_0^2R\,\text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta})$

$$= m\omega_0^2 R\,\text{sen}^2\theta\,\hat{\rho} + m\omega_0^2R\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\hat{\theta}$$

Ec. mov.

$\hat{\rho}$) $-mR\dot{\theta}^2 = m\omega_0^2R\,\text{sen}\,\theta - mg\cos\theta + N_\rho + m\omega_0^2R\,\text{sen}^2\theta$

$\hat{\theta}$) $\boxed{\cancel{m}R\ddot{\theta} = \cancel{m}\omega_0^2R\cos\theta + \cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta + \cancel{m}\omega_0^2R\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}$

$\hat{k}$) $0 = 2mR\dot{\theta}\omega_0\cos\theta + N_z$

$\hat{\theta}$) $R\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \cancel{m}\omega_0^2R\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta + g\int_0^{\pi/2}\text{sen}\,\theta\,d\theta + \cancel{m}\omega_0^2R\int_0^{\pi/2}\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$

(*) $\frac{R\dot{\theta}^2}{2} = \omega_0^2R + g + \frac{\omega_0^2R}{2} \qquad (R\dot{\theta})^2 = 3(\omega_0R)^2 + 2gR$

$\therefore$ En $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{v' = (3\omega_0^2R^2 + 2gR)^{1/2}}$

En ese momento la velocidad del tubo en ese punto es

$\vec{v} = -(\omega_0 2R)\hat{k} \qquad \vec{v}_{ABS} = (v'\hat{\theta} - (2\omega_0R)\hat{k})$

$$\therefore\ v_{ABS}^2 = (2\omega_0R)^2 + (3\omega_0^2R^2 + 2gR)$$

$$\boxed{v_{ABS}^2 = 7\omega_0^2R^2 + 2gR}$$

P. 2 c) F. normal en $\theta = \pi/2$

De ec. de mov. en $\hat{k}$) $\rightarrow$ $N_z = 0$

De ef en $\hat{\rho}$)

$$-mR\dot{\theta}^2\Big|_{\theta=\pi/2} = m\omega_0^2 R + N_\rho + m\omega_0^2 R$$

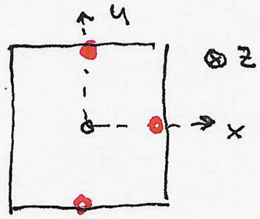
De (*) $R\dot{\theta}^2 = 3\omega_0^2 R + 2g$

$\therefore$ $N_\rho = -3m\omega_0^2 R - 2mg - 2m\omega_0^2 R$

$\hat{\rho}$) $N_\rho = -5m\omega_0^2 R - 2mg$

$$\boxed{|N_\rho| = 5m\omega_0^2 R + 2mg}$$

P3



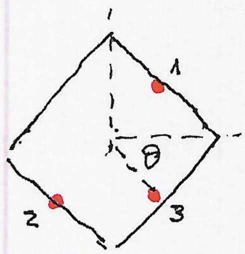
$$I_o = \underbrace{\frac{1}{12}ML^2}_{\text{PLACA}} + \underbrace{3m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{PARTÍCULA}} \qquad M=3m$$

$$I_o = \left(\frac{3m}{12}+\frac{3m}{4}\right)L^2 = mL^2$$

a) $t=0$ $\quad I_o\ddot\theta = \vec\tau_o\cdot\hat k = \left[\frac{L}{2}\hat i\times(-mg\hat j)\right]\cdot\hat k = mg\frac{L}{2}$

$$\ddot\theta = \frac{mg\frac{L}{2}}{I_o} \rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{g}{2L}}$$

b)

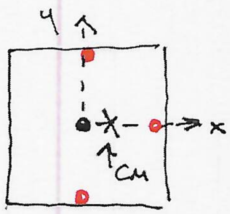


CUANDO LA PLACA HA ROTADO EN θ
EL TORQUE DE LOS PESOS DE PARTÍCULAS 1 Y 2
SE ANULAN

SOLO EJERCE TORQUE LA PARTÍCULA 3

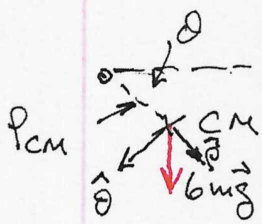
Ec. de movimiento del C.M $\quad M_T\vec a_{cm} = \vec F_{eje} + \underbrace{3m\vec g}_{\text{PLACA}} + \underbrace{3m\vec g}_{\text{PART.}}$

$M_T = 6m$



$$\vec R_{CM} = \frac{1}{6\cancel{m}}\left[\underset{\uparrow\text{PLACA}}{\vec 0} + \cancel{\frac{mL}{2}\hat j} - \cancel{\frac{mL}{2}\hat j} + \frac{\cancel{m}L}{2}\hat i\right] = \frac{L}{12}\hat i$$

$$\vec a_{cm} = -\rho_{cm}\dot\theta^2\hat\rho + \rho_{cm}\ddot\theta\hat\theta \qquad \boxed{\rho_{cm} = \frac{L}{12}}$$



$$6m\left(-\frac{L}{12}\dot\theta^2\hat\rho + \frac{L}{12}\ddot\theta\hat\theta\right) = 6mg\cos\theta\,\hat\theta + 6mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat\rho + N_\rho\hat\rho + N_\theta\hat\theta$$

donde $\vec F_{eje} = N_\rho\hat\rho + N_\theta\hat\theta$

$$I_o\ddot\theta = mg\frac{L}{2}\cos\theta \rightarrow \ddot\theta = \frac{\cancel{m}gL}{2\cancel{m}L^2}\cos\theta \rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{g}{2L}\cos\theta}$$

$$\int_0^{\dot\theta}\dot\theta\,d\dot\theta = \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta \rightarrow \frac{1}{2}\dot\theta^2 = \frac{g}{2L}\,\text{sen}\,\theta \;\therefore\; \boxed{\dot\theta^2 = \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta}$$

$\hat{\rho})\quad -\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 = 6mg\,\text{sen}\,\theta + N_\rho$

$$N_\rho = -\frac{m\cancel{L}}{2}\left(\frac{g}{\cancel{L}}\,\text{sen}\,\theta\right) - 6mg\,\text{sen}\,\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \boxed{N_\rho = -\frac{13}{2\sqrt{2}}mg}$

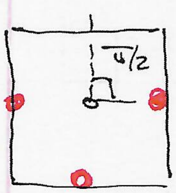
$\hat{\theta})\quad 6m\frac{L}{12}\ddot{\theta} = 6mg\cos\theta + N_\theta$

$$N_\theta = 6m\frac{\cancel{L}}{12}\frac{g}{2\cancel{L}}\cos\theta - 6mg\cos\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \boxed{N_\theta = -\frac{23}{4\sqrt{2}}mg}$ $\quad \boxed{|\vec{F}_{eje}|^2 = N_\rho^2 + N_\theta^2}$

c) $\quad J_o\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta$

Equilibrio $\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



Exp. en Serie de Taylor de $\cos\theta$ alrededor de $\theta = \pi/2$

$$\cos\theta = \cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \frac{d\cos\theta}{d\theta}\Big|_{\pi/2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\theta \sim -\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \ddot{\theta} = \frac{mg\frac{L}{2}}{I_o}\left(-\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{g}{2L}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{2L}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ M.A.S $\quad \omega_o^2 = \frac{g}{2L} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}}$$