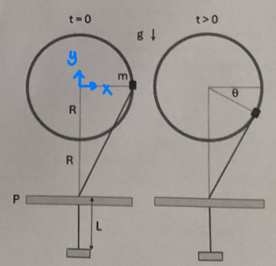
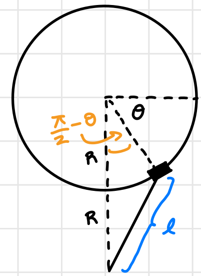
Problema 3. Un anillo de masa m puede deslizar sin roce a lo largo de un aro de radio R colocado en posición vertical. El anillo de encuentra unido al extremo de un elástico de constante **k** y largo natural **L** que pasa por un agujero en la placa P que se encuentra a una distancia **2R** debajo del centro del aro (ver figura adjunta). De esta forma, todo lo que sobresale del elástico por encima de la superficie superior de la placa es deformación del mismo. En t=0 se suelta el anillo desde una posición al nivel del centro del aro.

a) Calcule la velocidad del anillo cuando pasa por el punto más bajo del aro (2 pts)

b) Calcule la fuerza que el aro ejerce sobre el anillo cuando pasa por el punto más bajo del aro (2 ptos)

c) Determine si existe un punto de equilibrio estable para el anillo, y si existe, determine el período de pequeñas oscilaciones cuando se perturba ligeramente el anillo estando en reposo en esa posición. (2 ptos)





a)

T^{ma} coseno

$$\ell^2 = 4R^2 + R^2 - 2\cdot 2R\cdot R\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)}_{\sin\theta}$$

$$= R^2(5-4\sin\theta)$$

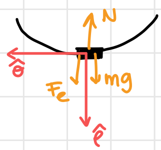
$$E(\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - mgR\sin\theta + \frac{1}{2}k\overbrace{R^2(\underbrace{\cancel{5}}_{cte}-4\sin\theta)}^{\ell^2}$$

Así $E(\theta=0) = E(\theta=\frac{\pi}{2})$ por cons. Energía

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgR - 2kR^2$$

$$v^2 = \frac{2}{m}(2kR^2+mgR) = \frac{4kR^2}{m} + 2gR$$

b) En el punto más bajo



$\hat{e}|$ $-mR\dot\theta^2 = -N + mg + F_e$

$-m\frac{v^2}{R} = -N + mg + kR$ parte a)

$$N = mg + kR + \frac{m}{R}\frac{2}{m}(2kR^2+mgR)$$

$$N = 3mg + 5kR$$

c) $V(\theta) = -mgR\sin\theta - 2kR^2\sin\theta$

$V'(\theta) = -R(mg+2kR)\cos\theta$ es cero en $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

¿Estabilidad? $V''(\theta) = R(mg+2kR)\sin\theta > 0$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ eq. estable

Período de pequeñas oscilaciones

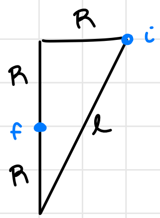
$$\omega^2 = \frac{V''(\theta_{eq})}{mR^2} = \frac{R(mg+2KR)}{mR^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{2K}{m}}$$

y $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

da lo mismo si T ó ω ó f

a*)



$$\ell_i^2 = 5R^2 \implies E_i = \cancel{\tfrac{1}{2} m v_0^2}^{\,0} + \tfrac{1}{2} K\, 5R^2$$

$$\ell_f^2 = R^2$$

$$E_f = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} K R^2 - mgR$$

$$\tfrac{5}{2} K R^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} K R^2 - mgR$$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(\tfrac{4}{2} K R^2 + mgR\right)$$

$$= \frac{2}{m}\left(2KR^2 + mgR\right)$$