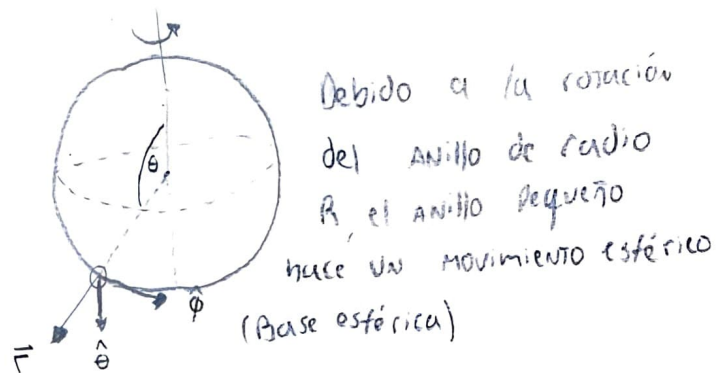
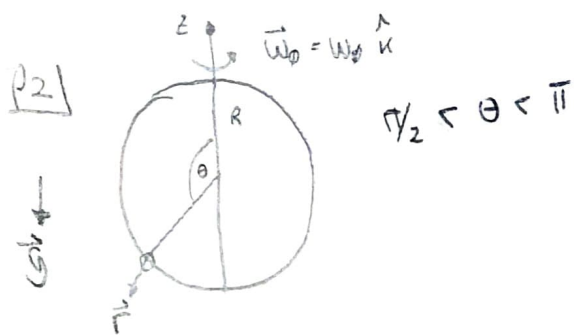
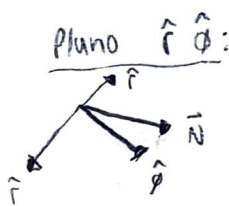
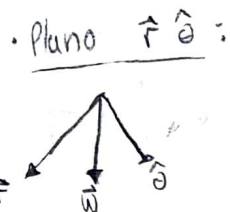


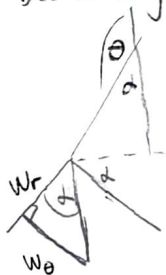


OCL:)



Descomponemos el peso:

$$\alpha = \pi - \theta$$



$$W_r = mg \cos \alpha$$

$$W_\theta = mg \sin \alpha$$

* Después le asigno el signo

Por otro lado digamos que

$$\vec{N} = -N_r \hat{r} + N_\phi \hat{\phi}$$

2da Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{W} = -N_r \hat{r} + N_\phi \hat{\phi} + mg \cos \alpha \hat{r} + mg \sin \alpha \hat{\theta} = m \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi} \right]$$

El anillo pequeño estará solo por el "cascarón" de la esfera, es decir $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ por enunciado imponemos $\ddot{\theta} = \omega_\theta$ cte $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

Queremos encontrar $\dot{\phi} = \omega_\phi$

Separamos en ec. escalares:

En $\hat{r}$: (1)

$$mg \cos \alpha - N_r = m(-R\omega_0^2 - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

En $\hat{\theta}$: (2)

$$mg \sin \alpha = -mR\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

En $\hat{\phi}$: (3)

$$N_\phi = m a_\phi$$

Entonces usamos (2): $\alpha = \pi - \theta$

$$mg \sin(\pi - \theta) = -mR\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow$$

$$\frac{-g \sin(\pi - \theta)}{R \sin \theta \cos \theta} = \dot{\phi}^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-g}{R \cos \theta} = \dot{\phi}^2$$

* No asustarse por el signo, $\cos(\theta) < 0$, cuando $\theta \in (\pi/2, \pi)$
 $\dot{\phi}^2 > 0$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\pi) \cos \theta - \sin \theta \cos(\pi) = \sin \theta$$

Ahora usamos (1)

$$mg \cos \theta - N_r = -m(R\omega^2 + R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$-mg \cos \theta - N_r = -m \left(\frac{Rg}{R} + R \left(\frac{-g}{R \cos \theta} \right) \sin^2 \theta \right)$$

$$N_r = m \left(g - \frac{g \sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) - mg \cos \theta$$

$$= m \left(g + \frac{g(\cos^2 \theta - 1)}{\cos \theta} \right) - mg \cos \theta$$

$$= mg + mg \cos \theta - \frac{mg}{\cos \theta} - mg \cos \theta$$

$$\therefore N_r = mg \left[1 - \frac{1}{\cos \theta} \right]$$

Definir $\vec{N} = \underbrace{-N_r}_{N_r} \hat{r} + N_\theta \hat{\phi}$, así que la componente de la normal en r tangente será N_r

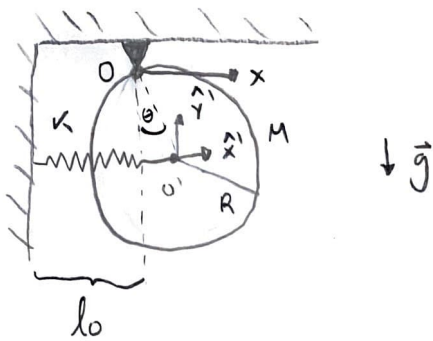
$$N_r = - \left(mg \left[1 - \frac{1}{\cos \theta} \right] \right) = mg \left[\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right]$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \omega_\theta^2 = \frac{g}{R}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\pi - \theta) = \cos^{\frac{1}{1-1}} \pi \cos \theta + \sin^{\frac{1}{1-1}} \pi \sin \theta$$
$$= -\cos \theta$$

$$* -\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$$

P3)



a) $\vec{L}_O$ y $\vec{\omega}$

Hay que usar que:

$$\vec{L}_O = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{r}_{cm} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}) + \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

Sabemos que el centro de masas de un disco homogéneo es en su centro, donde ubicamos a O' :

$$\therefore \vec{r}_{cm} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

Tenemos que determinar $\vec{R}$, $\dot{\vec{R}}$ y $\vec{\omega}$:

Recordar que $\vec{R}$ une O con O' , así que usando polares:



$$\begin{aligned} \vec{R} &= R\hat{j} \\ \dot{\vec{R}} &= R\dot{\theta}\hat{\theta} \end{aligned}$$



Por regla de la mano derecha, el vector $\vec{\omega}$ tiene que salir de la página, es decir, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\vec{L}_O = M(R\hat{j} \times R\dot{\theta}\hat{\theta}) + \vec{I} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Matriz de 3×3 por un vector columna

$$\vec{I} = M \begin{pmatrix} R^2/4 + h^2/12 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/4 + h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & R^2/2 \end{pmatrix}$$

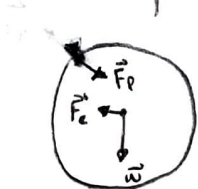
$$= MR^2\dot{\theta}(\hat{j} \times \hat{\theta}) + M\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2/2 \end{pmatrix}$$

* Recordar $\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Además, $\omega = \dot{\theta}$ (como rota el sólido lo determina $\dot{\theta}$)

$$\therefore \vec{L}_O = MR^2 \dot{\theta} \hat{u} + MR^2 \dot{\theta} \hat{u} = \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta} \hat{u}$$

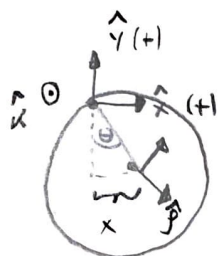
Ya obtuvimos el momento angular desde O, así que ahora hay que calcular el torque de las fuerzas respecto a O.



$$\vec{\tau}_{Fp} = \vec{O} \times \vec{F}_p = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_{Fe} = R \hat{j} \times F_e \hat{x} = R F_e (\hat{j} \times \hat{x})$$

$$\vec{\tau}_w = R \hat{j} \times (w) \hat{y} = R w (\hat{j} \times \hat{y})$$



$$\hat{j} = \sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}$$

$$F_e = -k(x) = -kR \sin \theta \quad ; \quad w = -Mg$$

$$\hat{j} \times \hat{x} = (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) \times (\hat{x}) = -\cos(\theta) (\hat{y} \times \hat{x}) = -\cos(\theta) (-\hat{u}) = \cos \theta \hat{u}$$

$$\hat{j} \times \hat{y} = (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) \times (\hat{y}) = \sin \theta (\hat{x} \times \hat{y}) = \sin \theta \hat{u}$$

Así que los torques quedan como:

$$\vec{\tau}_{Fe} = R(-kR \sin \theta) \cos \theta \hat{u} = -R^2 k \sin \theta \cos \theta \hat{u}$$

$$\vec{\tau}_w = R(-Mg) \sin \theta \hat{u}$$

Dado que estamos en el régimen de pequeñas oscilaciones, $\theta \ll 1$, así que podemos aproximar el seno y el coseno, $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{Fe} = -R^2 k (\theta) 1 \hat{u} \quad \wedge \quad \vec{\tau}_w = -MgR \theta \hat{u}$$

Tenemos que usar que $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{neto}$, así que derivamos $\vec{L}_O$ respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} \hat{u} = (-MgR \theta - R^2 k \theta) \hat{u}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + (MgR + R^2 k) \theta = 0 \quad / \cdot \frac{2}{3MR^2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3} \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{M} \right) \theta = 0$$

Finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{M} \right)}$$

b) Debemos determinar la energía mecánica del sólido, para usar la conservación de la energía, obtener una ec. de mov. y determinar W .

La energía cinética para un sólido rígido es:

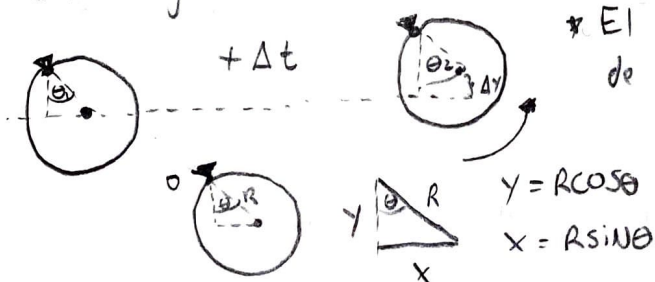
$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \left(\underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}_{cm}}_{=0} \right) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \mathbf{I} \vec{\Omega}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\text{Energía cinética traslacional}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \mathbf{I} \vec{\Omega}}_{\text{Energía cinética rotacional}}$$

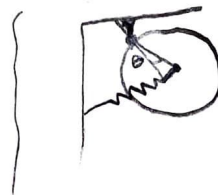
De la parte anterior sabemos que $\dot{\vec{R}} = R \dot{\theta} \hat{\theta}$ y que $\mathbf{I} \cdot \vec{\Omega} = M \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} \hat{\theta} \cdot R \dot{\theta} \hat{\theta}) + \frac{1}{2} (0 \ 0 \ 2) M \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{M R^2 \dot{\theta}^2}{4} \\ &= \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

La Energía Potencial tendrá una parte asociada a la gravedad y otra al resorte



* El sólido rotó por lo que su centro de masas subió respecto a O



Lo que se estira el resorte sigue siendo x .

$$U = U_g + U_r = -MgR \cos \theta + \frac{k}{2} (R \sin \theta)^2$$

$$\therefore E = K + U = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2} (R \sin \theta)^2 - MgR \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{3}{4} M R^2 (2 \dot{\theta} \ddot{\theta}) + \frac{k}{2} R^2 (2 \sin \theta \cos \theta) \dot{\theta} + MgR \sin \theta \dot{\theta} \quad \theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta \approx \theta \wedge \cos(\theta) \approx 1 \\ &= \frac{3}{4} M R^2 (2 \dot{\theta} \ddot{\theta}) + k R^2 (\theta) (\dot{\theta}) + MgR \theta \dot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + KR^2 \theta + MgR\theta \right) \dot{\theta} = 0$$

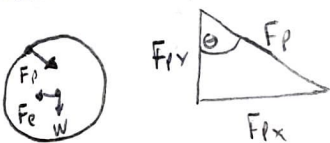
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} MA^2 \ddot{\theta} + (KR^2 + MgR)\theta = 0 \quad / \cdot \frac{2}{3} MR^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3} \left(\frac{K}{M} + \frac{g}{R} \right) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{K}{M} + \frac{g}{R} \right)}$$

$$c) \theta(t=0) \wedge \dot{\theta}(t=0) = v_0$$

Para encontrar la fuerza usamos 2da Ley de Newton en el centro de masas



$$\vec{F}_p = F_{px} \hat{x} + F_{py} \hat{y}$$

$$\therefore \sum F_x = F_c + F_{px} = M \ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow -Kx + F_{px} = M \ddot{x}$$

$$\Rightarrow F_{px} = M \ddot{x} + Kx$$

Recordar que $x = R \sin \theta$, $\theta \ll \sin \theta \approx \theta \Rightarrow x = R\theta$

$$\Rightarrow F_{px} = MR \ddot{\theta} + KR \theta = MR(-\omega^2 \theta) + KR \theta = KR \theta - MR \omega^2 \theta$$

θ lo encontramos resolviendo $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$

$$\therefore \theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Aplicamos C.I : $\theta(t=0) = 0 \wedge \dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = v_0$

$$\theta(t=0) = A = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = B \omega \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = B \omega = \frac{v_0}{R} \Rightarrow B = \frac{v_0}{R \omega}$$

$$\therefore \theta(t) = \frac{v_0}{R \omega} \sin(\omega t)$$

Finalmente

$$F_{px} = (K - M \omega^2) R \theta = (K - M \omega^2) \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = v_0 \left(\frac{K}{\omega} - M \omega \right) \sin(\omega t)$$