Auxiliar Extra Examen

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Fernanda Padró, Gaspar de la Barrera, Álvaro Cifuentes
Ayudantes: Luis Painemal, Constanza Rodríguez

P1

Un anillo de radio R gira con velocidad angular $\vec{\omega}_\phi = \omega_\phi \hat{k}$ en torno al eje vertical z de la figura, el cual pasa por su centro en el punto O y se intersecta con el anillo en los puntos A y B. Otro anillo, mucho más pequeño y de masa m desliza sin roce y en presencia de aceleración de gravedad $\vec{g} = -g\hat{k}$ a lo largo del anillo de radio R. La posición del anillo pequeño está determinada por el angulo θ que se muestra en la figura, el cual cumple con $\pi/2 < \theta < \pi$.

a) Encuentre el valor de ω_ϕ en función de θ (es decir, $\omega_\phi(\theta)$) de modo que $\dot{\theta} = \omega_\theta$ sea constante.

b) Si se sabe que en todo instante, $\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{R}}$ y considerando la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce el anillo de radio R sobre el anillo pequeño, encuentre la componente radial N_r de la normal en términos de m, g y θ.
(N_r corresponde a la componente de $\vec{N}$ que apunta a lo largo del vector unitario $\hat{r}$ que se muestra en la figura).

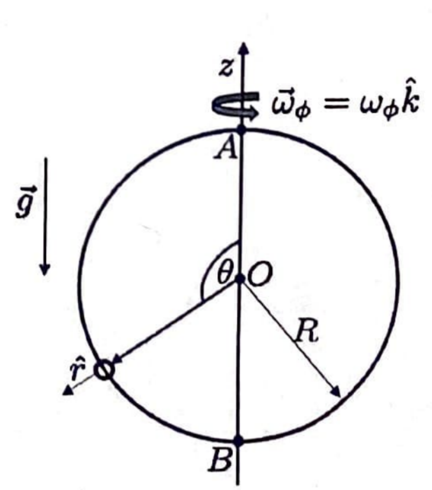

Figura 1: P1

Aceleración en coordenadas esféricas:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{\phi}$$

P2

El disco de la figura tiene masa M y radio R, y puede girar sin roce en torno a un pivote en el punto O. Su centro se encuentra sujeto a un resorte de constante k y largo natural l_0 dispuesto horizontalmente y sujeto en su extremo izquierdo a un muro como muestra la figura, además considere que $\vec{g} = -g\hat{y}$. El sistema se encuentra en equilibrio cuando el ángulo θ de la figura es nulo.

a) Usando la relación entre momentum angular y torque, encuentre la frecuencia con la que oscila el disco en torno a su posición de equilibrio. Considere el régimen de pequeñas oscilaciones tal que el resorte siempre pueda considerarse en posición horizontal.

b) Repita a) pero usando conservación de energía.

c) Si en $t = 0$ el ángulo θ es nulo, pero aumenta de modo que el centro de masa del disco se mueve con rapidez v_o, encuentre la componente x (horizontal) de la fuerza que el pivote ejerce sobre el disco para cada tiempo $t > 0$.

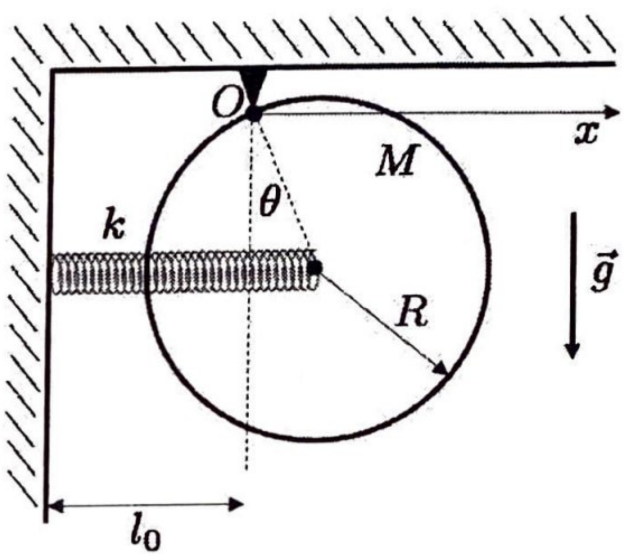

Figura 2: P3

Considere que un disco de masa M y radio R, tiene una matriz de inercia medida desde su centro de masa con el siguiente valor:

$$I_{cm'} = M \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

El momentum angular y la energía cinética de un sólido rígido son:

$$\vec{L}_O = M\,\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\,\vec{r}_{cm'} \times \dot{\vec{R}} + M\,\vec{R} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{cm'}\right) + I_{O'} \cdot \vec{\Omega}$$

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M\,\dot{\vec{R}} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_{cm'}\right) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \cdot I_{O'} \cdot \vec{\Omega}$$