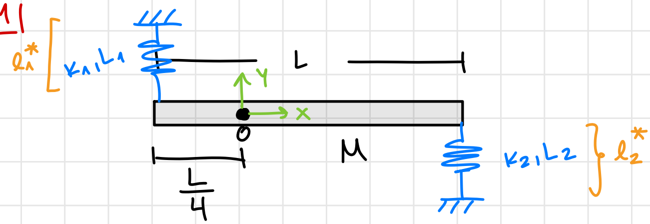
Pauta Aux 27

P1)



Nos dicen que cuando está en posición horizontal:

i) El sist. está en equilibrio ($\Rightarrow \vec{\tau}_O = 0$)

ii) El resorte 1 está en su largo natural

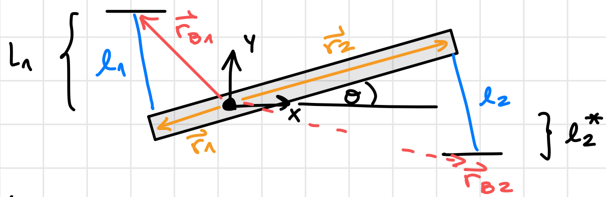
$$\tau_O = -\frac{L}{4}mg - \frac{3L}{4}(\ell_2^* - L_2)k_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\ell_2^* = L_2 - \frac{mg}{3k_2}}$$

Sea $\vec{r}_{B_1}$ la posición de la base del resorte 1 : $\vec{r}_{B_1} = \left(-\frac{L}{4}, L_1\right)$

Sea $\vec{r}_{B_2}$ la posición de la base del resorte 2 : $\vec{r}_{B_1} = \left(\frac{3L}{4}, -\ell_2^*\right)$

y para un θ cualquiera, sea $\vec{r}_1$ la posición del extremo izquierdo de la barra

$$\vec{r}_1 = -\frac{L}{4}(\cos\theta, \sin\theta)$$



y sea $\vec{r}_2$ la pos. del extremo derecho

$$\vec{r}_2 = \frac{3L}{4}(\cos\theta, \sin\theta)$$

y lo voy a hacer con energía $E = K + V_{mg} + V_{k_1} + V_{k_2}$

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1(\underbrace{\ell_1}_{\text{largo del resorte 1 para un } \theta \text{ cualquiera}} - L_1)^2$$

> Para esto necesitamos calcular ℓ_1, pero con la parametrización de las posiciones que hicimos, notamos que

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_{B_1}| \\
&= \left| -\frac{L}{4}(\cos\theta, \sin\theta) - \left(-\frac{L}{4}, L_1\right)\right| \\
&= \sqrt{\frac{L^2}{4^2}(\underbrace{1-\cos\theta}_{\approx 1-1=0})^2 + \left(\frac{L}{4}\sin\theta + L_1\right)^2} \\
&\approx \sqrt{\left(\frac{L}{4}\theta + L_1\right)^2} \\
&= \frac{L}{4}\theta + L_1
\end{aligned}$$

y ahora usamos que θ es chico $\left(\begin{matrix}\cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta\end{matrix}\right)$

Así

$$V_{k_1} \approx \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{L}{4}\theta\right)^2$$

Hacemos lo mismo para V_{k_2}

$$V_{k_2} = \frac{1}{2} k_2 (\ell_2 - L_2)^2$$

$$\begin{aligned} \ell_2 &= |\vec{r}_2 - \vec{r}_{02}| \\ &= \left| \frac{3L}{4}(\cos\theta, \sin\theta) - \left(\frac{3L}{4}, -\ell_2^*\right) \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{3L}{4}\right)^2 \underbrace{(\cos\theta - 1)^2}_{\approx 0} + \left(\frac{3L}{4}\sin\theta + \ell_2^*\right)} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{3L}{4}\theta + L_2 - \frac{mg}{3k_2}$$

$$V_{k_2} = \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{3L}{4}\theta - \frac{mg}{3k_2}\right)^2 = \frac{1}{2} k_2 \frac{9L^2}{16}\theta^2 - \cancel{k_2} \frac{3L}{4}\theta \frac{mg}{\cancel{3k_2}} + \underbrace{\frac{1}{2} k_2 \left(\frac{mg}{3k_2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} k_2 \frac{9L^2}{16}\theta^2 - mg\frac{L}{4}\theta$$

es una cte, que no importan en la energía

∴ no pescamos esta cte

Falta el potencial gravitatorio

$$V_{mg} = mg\, y_{CM} = mg\frac{L}{4}\sin\theta \approx mg\frac{L}{4}\theta$$

y la energía cinética, para un sólido que gira fijo a un punto O

$$K = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \quad \therefore \text{ calculemos } I_O$$

densidad de la barra

$$I_O = \int dm\, \rho^2 \quad , \text{ con } dm = \frac{M}{L} d\rho \quad \text{y} \quad \rho \in \left[-\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right]$$

pedacito de largo

$$= \frac{M}{L}\int_{-L/4}^{3L/4} d\rho\, \rho^2 = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left(\left(\frac{3L}{4}\right)^3 - \left(-\frac{L}{4}\right)^3\right) = \frac{ML^2}{3\cdot 4^3}(27+1) = \frac{7ML^2}{3\cdot 16}$$

y por lo tanto, $K = \frac{1}{2}\frac{7ML^2}{3\cdot 16}\dot{\theta}^2$

Así, la energía queda

$$E = \frac{1}{2}\frac{7ML^2}{3\cdot 16}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k_1\left(\frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\frac{9L^2}{16}\theta^2 - \cancel{mg\frac{L}{4}\theta} + \cancel{mg\frac{L}{4}\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{7ML^2}{3\cdot 16}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{16}(k_1 + 9k_2)\theta^2 \qquad (*)$$

Para concluir, debemos comparar (*) con la energía de un oscilador armónico $E_{osc} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ que su frec. natural es $\omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir

$$\omega^2 = \frac{(\text{lo que acompaña a } \frac{1}{2}x^2)}{(\text{lo que acompaña a } \frac{1}{2}\dot{x}^2)}$$

En nuestro caso, el rol de x lo toma θ, y

¿qué acompaña a $\frac{1}{2}\theta^2$? $\qquad \frac{L^2}{16}(k_1 + 9k_2)$

¿qué acompaña a $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2$? $\qquad \frac{7ML^2}{3 \cdot 16}$

$\therefore$

$$\omega^2 = \frac{\cancel{\frac{L^2}{16}}(k_1 + 9k_2)}{\frac{7M\cancel{L^2}}{3\cdot\cancel{16}}}$$

$$= \frac{3(k_1 + 9k_2)}{7M} \quad //$$