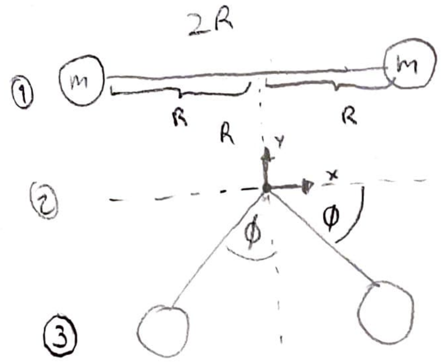
P2)



Partamos viendo que pasa en un inicio, las dos masas se dejan caer desde una altura R (acorde a nuestro origen) y queremos saber las condiciones iniciales de nuestro movimiento de rotación (en ③), entonces dado que estamos en un sistema con solo fuerzas conservativas (el peso es la única a considerar, la tensión de la cuerda no nos interesa en el estudio energético).

EN T=0 | ①

$$E = K_T + U_T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR + mgR$$

[$v_1 = v_2 = 0$, parten del reposo]

$$\rightarrow E(T=0) = 2mgR$$

EN T=T* | ②

$$E = K_T + U_T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh + mgh$$

$$E(T=T^*) = mv^2$$

[$v_1 = v_2 = v$ verlo de la sgte forma.

$\vec{r}_{masa\ izq} = -R\hat{x} + y\hat{y}$ | $\vec{r}_{masa\ der} = R\hat{x} + y\hat{y}$

$\dot{\vec{r}}_{m.izq} = \dot{y}\hat{y} = \dot{\vec{r}}_{m.der} = \dot{y}\hat{y}$

[h es cero pq estamos a la altura del origen]

Por conservación de la energía:

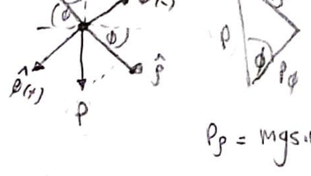
$$E(T=0) = E(T=T^*)$$

$$\Leftrightarrow 2mgR = mv^2$$

$$\Rightarrow V_0^2 = 2gR$$

$\rightarrow$ con esta velocidad las masas partirán la rotación.

Para la masa a la derecha:



$P_\rho = mg\sin\phi$

$P_\phi = mg\cos\phi$

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$-T\hat{\rho} + mg\sin\phi\,\hat{\rho} + mg\cos\phi\,\hat{\phi} = m(-R\dot{\phi}^2 + R\ddot{\phi}\,\hat{\phi})$$

EN $\hat{\phi}$:

$$mg\cos\phi = mR\ddot{\phi}$$

$$\frac{g}{R}\cos\phi = \frac{d\dot{\phi}\,\dot{\phi}}{d\phi}$$

$$\frac{g}{R}\cos\phi \, d\phi = \dot\phi \, d\dot\phi \quad \Big/ \int_0^T$$

$$\frac{g}{R}\int_{\phi(0)}^{\phi(T)} \cos\phi \, d\phi = \int_{\dot\phi(0)}^{\dot\phi(T)} \dot\phi \, d\dot\phi$$

$$\frac{g}{R}\sin\phi\Big|_{\phi(0)}^{\phi(T)} = \frac{\dot\phi^2(T)}{2} - \frac{\dot\phi(0)}{2} \quad \Big/ \cdot 2$$

$\phi(0)$ para este caso es cero

En $T\neq 0$

$\longrightarrow$ En $T=0$

$$\frac{2g}{R}\sin\phi - \frac{2g}{R}\sin(0) + \dot\phi^2(0) = \dot\phi^2$$

$$\frac{2g}{R}\sin\phi + \frac{2g}{R} = \dot\phi^2$$

En $\hat{\rho}$:

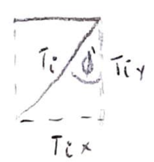
$$mg\sin\phi - T = -mR\dot\phi^2$$

$$mg\sin\phi + mR\left(\frac{2g}{R}\sin\phi + \frac{2g}{R}\right) = T$$

$$3mg\sin\phi + 2mg = T_d$$

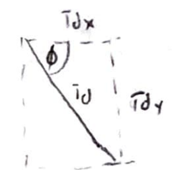
Ahora estudiamos el tope T:

Estudiamos las fuerzas en cartesianas:



$T_{iy} = T_i\cos\phi'$

$T_{ix} = T_i\sin\phi'$



$T_{dy} = T_d\sin\phi$

$T_{dx} = T_d\cos\phi$

La Normal aparece como la fuerza que se opone a las tensiones, tal que el tope no se mueve.

Nos interesa solo el eje Y, ya que es donde está N:

$$\sum F_y = N - T_{dy} - T_{iy} = M\vec{a}_y$$

, cuando estudiamos el caso límite, $N = \frac{7}{2}mg$ y a_y aún sigue siendo 0, es en el instante antes de que el tope comience a moverse.

En este problema las masas tienen el mismo comportamiento (mismas condiciones iniciales e iguales fuerzas actuando) solo que en distintos sentidos, por lo tanto

$$|T_d| = |T_e| \implies |T_{dy}| = |T_{iy}|$$

$\phi \in [0, \pi/2]$ $\therefore$ $\sin(\phi) \geq 0$

$$\implies \frac{7}{2}mg - 2|T_{dy}| = 0$$

$$\frac{7}{2}mg - 2(3mg\sin\phi + 2mg)\sin\phi = 0 \quad \Big/ \cdot -\frac{2}{mg}$$

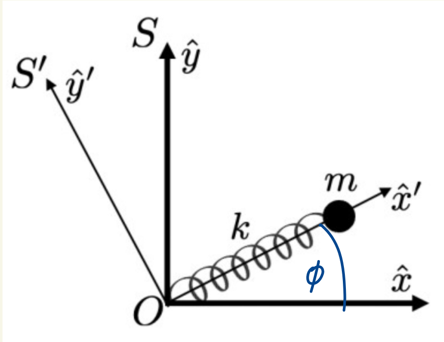
$$12\sin^2\phi + 8\sin\phi - 7 = 0$$

$$\implies \sin_{1,2}\phi = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4\cdot 7\cdot 12}}{24} = \frac{-8 \pm \sqrt{400}}{24}$$

$$\sin_1\phi_1 = \frac{-8-20}{24} < -1 \implies \nexists\, \phi_1 \mid \sin\phi_1 < -1$$

$$\sin_2\phi_2 = \frac{-8+20}{24} = \frac{12}{24} = 0{,}5 \implies \boxed{\phi_{crítico} = \frac{\pi}{6}}$$

P2)



a) Del dibujo podemos establecer el VECTOR velocidad angular, usando la regla de la mano derecha se obtiene:

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$$

Para obtener las ecs. de movimiento, debemos usar:

$$m(\vec{a})_{S'} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - 2m\vec{\Omega}\times(\vec{v})_{S'} - m\dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{r})_{S'} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times(\vec{r})_{S'})$$

Entonces vamos por términos:

- $m\vec{a}' = m(\ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}')$ (esto es lo que buscamos)
- $\vec{F} = \vec{F}_{Resorte} = -k(x'-l_0)\hat{x}' = -kx'\hat{x}'$
- $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$; $\vec{R} = 0(\hat{x}+\hat{y}) = \vec{0} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ * notar que este vector se escribe en la base del sistema inercial.

$*\ \hat{k} = \hat{k}' \Rightarrow \hat{k}\times\hat{x}' = \hat{y}' \ \wedge \ \hat{k}\times\hat{y}' = -\hat{x}'$

- $\vec{\Omega}\times(\vec{v}') = (\Omega\hat{k}\times(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}'))$
  $= \Omega\dot{x}'\hat{y}' - \Omega\dot{y}'\hat{x}'$
- $\dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{r}')$; $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{r}') = \vec{0}$
- $\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \Omega\hat{k}\times[(\Omega\hat{k}\times(x'\hat{x}' + y'\hat{y}'))]$
  $= \Omega\hat{k}\times[\Omega x'\hat{y}' - \Omega y'\hat{x}']$
  $= -\Omega^2 x'\hat{x}' - \Omega^2 y'\hat{y}'$

Ahora juntamos todo:

$$m(\ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}') = -kx'\hat{x}' - 2m(\Omega\dot{x}'\hat{y}' - \Omega\dot{y}'\hat{x}') + m(\Omega^2 x'\hat{x}' + \Omega^2 y'\hat{y}')$$

Separamos por componentes:

$$m\ddot{x}' = -kx' + 2m\Omega\dot{y}' + m\Omega^2 x' \quad (1)$$

$$m\ddot{y}' = -2m\Omega\dot{x}' + m\Omega^2 y' \quad (2)$$

b) Notemos que por enunciado sabemos que la partícula solo tiene posición en $\hat{x}'$:

$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \ddot{y}' = 0$

Por lo tanto, las ecs. quedan como:

$$m\ddot{x}' = -kx' + m\Omega^2 x' \quad (3)$$

$$0 = -2m\Omega\dot{x}' \quad (4)$$

Tenemos dos formas de mostrar lo que se pide: * Cantidad conservada $\Leftrightarrow \frac{d(c)}{dt} = 0$

1ra opción: manipulando (4)

$(4)\cdot x' \Leftrightarrow 0 = -2m\Omega\dot{x}'x'$

$0 = -m\Omega(2x'\dot{x}')$

$0 = -m\Omega\frac{d}{dt}(x'^2)$

$0 = \frac{d}{dt}(m\Omega x'^2)$

2da opción. Derivando c y comprobando con (4)

$\frac{d}{dt}(c) = \frac{d}{dt}(m\Omega x'^2) = m\Omega(2x'\dot{x}') \underset{(4)}{=} 0$

- C representa al momentum angular

$\vec{L}_0 = m\vec{r}\times\vec{v} = m(\vec{R}+\vec{r}')\times(v' + \vec{\Omega}\times\vec{r}') = m(x'\hat{x}')\times(\dot{x}'\hat{x}' + \Omega\hat{k}\times x'\hat{x}') = mx'\hat{x}'\times(\Omega x'\hat{y}')$
$= m\Omega x'^2\hat{k}$

c) $m\ddot{x}' = -kx' + m\Omega^2 x'$

$c = m\Omega x'^2 \Rightarrow \frac{c}{mx'^2} = \Omega \quad / (\ )^2$

$\frac{c^2}{m^2 x'^4} = \Omega^2$

$\Rightarrow \ddot{x}' = -\frac{k}{m}x' + \left(\frac{c^2}{m^2x'^4}\right)x'$

$\ddot{x}' = -\frac{k}{m}x' + \frac{c^2}{m^2x'^3}$

El equilibrio se alcanza cuando $\ddot{x}' = 0$:

$0 = -\frac{k}{m}x' + \frac{c^2}{m^2x'^3} \quad / \cdot x'^3$

$\frac{k}{m}x'^4 = \frac{c^2}{m^2}$

$x'_{eq} = \left(\frac{c^2}{km}\right)^{1/4}$

d) $\vec{F}_{x'} = -\nabla U_{eff}(x')$

$\Rightarrow U_{eff}(x') = \int^{x'}\left(kx - \frac{c^2}{mx^3}\right)dx$

$= \frac{k}{2}x'^2 + \frac{c^2}{2mx'^2}$