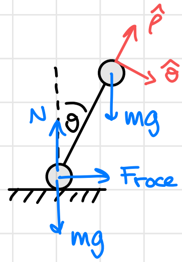
Pauta Aux 24

P1

Queremos calcular θ^*, el ángulo crítico en el que el sistema comienza a deslizar



las fzas internas no realizan trabajo

Sólo se mueve la masa de arriba y usamos coord. polares

$\sum_i m_i \vec{a}_i$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}$$

$$m(-L\dot\theta^2\,\hat\rho + L\ddot\theta\,\hat\theta) = (N-2mg)(\cos\theta\,\hat\rho - \sin\theta\,\hat\theta) + F_r(\sin\theta\,\hat\rho + \cos\theta\,\hat\theta)$$

$\sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

$$mL\hat\rho \times L\dot\theta\,\hat\theta = L\hat\rho \times -mg(\cos\theta\,\hat\rho - \sin\theta\,\hat\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\, mL^2\dot\theta\,\hat z = Lmg\sin\theta\,\hat z$$

$$\boxed{L\ddot\theta = g\sin\theta}$$

mecatruco

$$\boxed{\frac{L\dot\theta^2}{2} = g(1-\cos\theta)}$$

reemplazamos tanto $L\ddot\theta$ como $L\dot\theta^2$ en las ecs. de mov. en $(\hat\rho)$ y $(\hat\theta)$

$\hat\theta|$ $\quad mg\sin\theta = -N\sin\theta + F_r\cos\theta + 2mg\sin\theta$

$\hat\rho|$ $\quad -m\,2g(1-\cos\theta) = N\cos\theta - 2mg\cos\theta + F_r\sin\theta$

▷ Encontremos F_r haciendo $(\hat\theta)\cdot\cos\theta + (\hat\rho)\sin\theta$

$$m g \sin\theta \cos\theta - m\, 2g(1-\cos\theta)\sin\theta = + F_r \cos^2\theta + 2mg \cancel{\sin\theta} \cos\theta - 2mg \cancel{\cos\theta} \sin\theta + F_r \sin^2\theta$$

$$mg \sin\theta \, (-2 + 3\cos\theta) = F_r$$

➤ Encontremos N haciendo $(\hat{\theta}) \cdot \sin\theta - (\hat{\ell}) \cos\theta$

$$m g \sin^2\theta + 2mg(1-\cos\theta)\cos\theta = -N \sin^2\theta + F_r \cancel{\cos\theta} \sin\theta + 2mg \sin^2\theta - N\cos^2\theta + 2mg\cos^2\theta - F_r \cancel{\sin\theta} \cos\theta$$

$$mg(\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) = -N + 2mg$$

$$N = mg(2 - \cos\theta + \cos^2\theta \underbrace{- \sin^2\theta}_{\cos^2 - 1})$$

$$N = mg(1 - \cos\theta + 2\cos^2\theta)$$

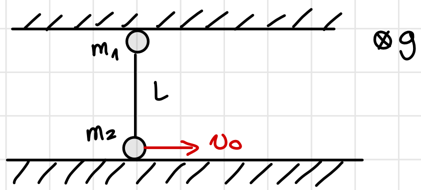
Luego como $F_r \leq \mu N$, el θ^* estará dado por el límite de la desigualdad, es decir, cuando $F_r = \mu N$, así

$$\cancel{mg} \sin\theta^* (-2 + 3\cos\theta^*) = \mu \cancel{mg} (1 - \cos\theta^* + 2\cos^2\theta^*)$$

$$\sin\theta^* (3\cos\theta^* - 2) = \mu (1 - \cos\theta^* + 2\cos^2\theta^*)$$

el θ^* es la solución de esta ecuación

P2



$m_1 = 2m$

$m_2 = m$

¿Cuánto tarda m_1 en chocar contra la pared?

Las fzas sobre las masas se cancelan, al igual que el torque

$$\vec{F}_{ext} = 0 \quad \wedge \quad \vec{\tau}_{ext} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad M\vec{a}_{CM} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{CM} = cte$$

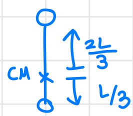
$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L}_{CM} = cte$$

Encontremos $\vec{v}_{CM}$ y $\vec{L}_{CM}$ usando las condiciones iniciales

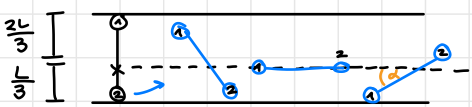
$$\vec{v}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot v_0 \hat{x}}{m_1 + m_2} = \frac{2v_0}{3}\hat{x}$$

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \frac{2L}{3}\hat{y} \times m_1\, 0 + -\frac{L}{3}\hat{y} \times m_2 \cdot v_0 \hat{x}$$

$$= \frac{2mLv_0}{3}\hat{z}$$



Luego, el CM se mueve hacia la derecha (no sube ni baja)



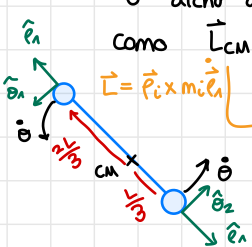
Para que m_1 toque la pared, $\frac{2L}{3} \cdot \sin\alpha = \frac{L}{3}$

$\sin\alpha = 1/2$

$\alpha = \pi/6$

O dicho de otra forma, m_2 debe rotar $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Como $\vec{L}_{CM} = cte = \frac{2mLv_0}{3}\hat{z}$



$\vec{L} = \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\frac{2L}{3}\hat{\rho}_1 \times m\frac{2L}{3}\dot{\theta}\hat{\theta}_1 + \frac{L}{3}\hat{\rho}_2 \times 2m\frac{L}{3}\dot{\theta}\hat{\theta}_2 = \frac{2mLv_0}{3}\hat{z}$$

$$m\frac{4L^2}{9}\dot{\theta}\underbrace{\hat{\rho}_1 \times \hat{\theta}_1}_{\hat{z}} + \frac{L^2}{9}2m\dot{\theta}\underbrace{\hat{\rho}_2 \times \hat{\theta}_2}_{\hat{z}} = \frac{2mLv_0}{3}\hat{z}$$

$$mL^2\dot{\theta}\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right) = \frac{2mLv_0}{3}$$

$$L\dot{\theta}\,\frac{2}{3} = \frac{2}{3}v_0$$

$$\dot{\theta} = v_0/L$$

luego usando que $\dot{\theta}T = \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}\frac{L}{v_0}$$