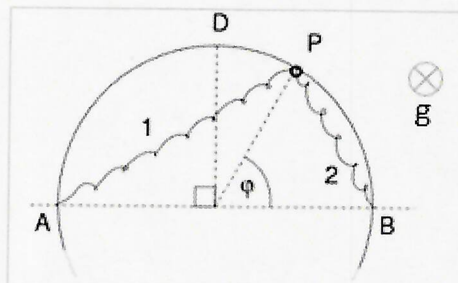
MECÁNICA (FI 2001-4) **CONTROL 2** Fecha: 14 de abril 2025

Profesor Patricio Aceituno; Profesores auxiliares: Fernanda Padró, Gaspar de la Barrera; José Manuel Muñoz
Ayudantes: Constanza Rodríguez; Luis Painemal

Problema 1. En los extremos opuestos A y B de un aro con forma de una semi-circunferencia de radio R, que se mantiene en posición horizontal (gravedad es perpendicular al plano que muestra la figura), se encuentran atados dos resortes ideales 1 y 2, ambos de largo natural R/2 y constante elástica k. Los dos resortes sujetan un anillo P de masa **m** que puede deslizar a lo largo del aro. Ningún roce afecta el movimiento.

1.5p (a) Determine la rapidez v_o que se le debe dar al anillo en el punto medio D de modo que alcance el punto B con rapidez $v_o/2$ (suponiendo que los resortes se puedan comprimir totalmente).

1.5p (b) Para la situación descrita en (a), determine la fuerza neta que el aro ejerce sobre el anillo P en el instante que pasa por el punto en que $\theta = \pi/3$ (60°)



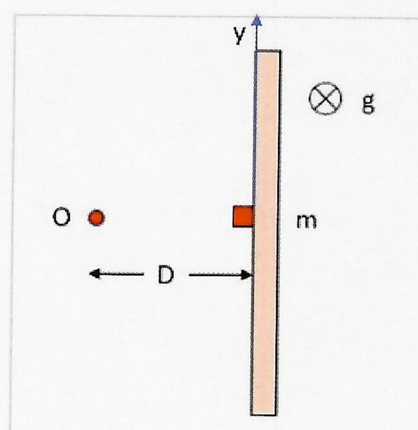
1.5p (a) Obtenga el o los punto(s) de equilibrio estable del anillo en el intervalo $(0 < \phi < \pi)$

1.5p (b) Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor del o de los puntos de equilibro estable.

Problema 2. Sobre una superficie horizontal se mueve una partícula de masa **m** a lo largo de una pared por acción de una fuerza central de tipo repulsivo **F = c/r** donde c es una constante positiva y **r** la distancia al centro de acción de la fuerza (punto O en la figura) que se encuentra a una distancia D de la pared. El roce de la partícula con la superficie y con la pared es despreciable. En la condición inicial la partícula se encuentra en reposo junto a la pared, en el punto más cercano al centro de acción de la fuerza F (punto P). Debido a una pequeña perturbación la partícula se pone en movimiento a lo largo de la pared.

a) 3p Determine la distancia recorrida por la partícula hasta el punto cuando la fuerza normal (N) que la pared ejerce sobre ella ha disminuido a la mitad, respecto del valor observado en la condición inicial.

b) 3p Plantee la ecuación de movimiento de la partícula a lo largo del eje "y" y a partir de esa ecuación calcule la rapidez de la partícula cuando pasa por el punto definido en la parte a)



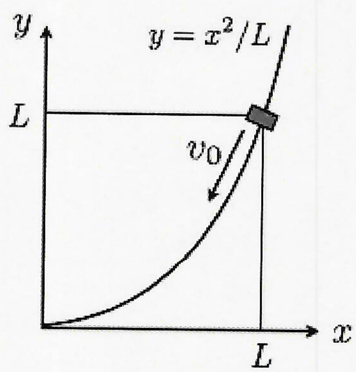
Problema 3. Un anillo de masa **m** se mueve inserto en un alambre con forma de parábola ($y = x^2/L$) en el plano x-y horizontal, donde **L** es una longitud conocida. En el instante inicial el anillo se encuentra en el punto (L, L) moviéndose hacia el origen con rapidez $\mathbf{v_o}$. Además, de la fuerza que el alambre ejerce sobre el anillo, actúan las siguientes dos fuerzas:

$$\vec{F}_1 = -Ar^3\hat{r},$$
$$\vec{F}_2 = B(y^2\hat{\imath} - x^2\hat{\jmath})$$

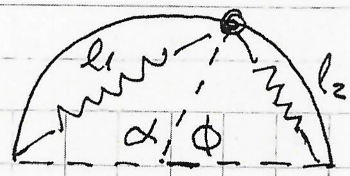
donde A y B son constantes positivas conocidas. Observe que F_1 es una fuerza que siempre apunta hacia el origen.

3p (a) Señale si F_1 y F_2 son conservativas o no. Justifique claramente su respuesta (2 puntos)

3p. (b) Determine la rapidez con que el anillo llega al origen.



P.1



$$L_0 = \frac{R}{2}$$

$$V = \frac{1}{2}k\delta_1^2 + \frac{1}{2}k\delta_2^2$$

$$\delta_1 = l_1 - \frac{R}{2} \qquad \delta_2 = l_2 - \frac{R}{2}$$

$$l_2^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\phi$$

$$l_1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \cos(\pi - \phi)$$

$$\cos\alpha = -\cos\phi$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}k\left[\left[(2R^2 - 2R^2\cos\phi)^{1/2} - \frac{R}{2}\right]^2 + \left[(2R^2 + 2R^2\cos\phi)^{1/2} - \frac{R}{2}\right]^2\right]$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}kR\Bigg[\underbrace{\left(\sqrt{2-\cos\phi} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\cos\phi} - \frac{1}{2}\right)^2}_{F(\phi)}\Bigg]$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}kR \times \left[(2-\cos\phi) - \sqrt{2-\cos\phi} + \frac{1}{4} + (2+\cos\phi) - \sqrt{2+\cos\phi} + \frac{1}{4}\right]$$

$$V(\phi) = \left[\frac{9}{2} - \sqrt{2-\cos\phi} - \sqrt{2+\cos\phi}\right] \times \frac{1}{2}kR$$

c) Punto D $\phi = \frac{\pi}{2}$ Pto B $\phi = 0$

vel. en D v_0 vel en B $v = \frac{v_0}{2}$

Potencial $V\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{9}{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{9}{2} - 2\sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2}kR$

$$V(\phi = 0) = \left(\frac{9}{2} - \sqrt{1} - \sqrt{3} = \frac{7}{2} - \sqrt{3}\right) \times \frac{1}{2}kR$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \underbrace{\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}}_{\times \frac{1}{2}kR} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{7}{2} - \sqrt{3}}_{\times \frac{1}{2}kR}$$

$$\frac{3mv_0^2}{8} = \frac{1}{2}kR\left[\frac{7}{2} - \sqrt{3} - \frac{9}{2} + 2\sqrt{2}\right] = \frac{0.096\,kR}{2}$$

a) $V_0^2 = \frac{4}{3}\frac{kR}{m} \cdot 0.096 = 0.128 \frac{kR}{m}$

b) Potencial $V(\theta = \frac{\pi}{3})$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$V(\theta = \tfrac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}kR\left[\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$$

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + V(\theta = \tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}mV^{*2} + V(\theta = \tfrac{\pi}{3})$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}kR\left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}mV^{*2} + \frac{1}{2}kR\left(\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$V^{*2} = V_0^2 + \frac{kR}{m}\left(\cancel{\frac{9}{2}} - 2\sqrt{2} - \cancel{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$V^{*2} = V_0^2 + \frac{kR}{m}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{2}\right)$$

Fuerza normal horizontal en $\phi = \frac{\pi}{3}$

$$m\frac{V^{*2}}{R} = N_h$$

Fuerza neta normal considerando la gravedad

$$N = \sqrt{N_H^2 + (mg)^2}$$

c) $$V(\phi) = \frac{1}{2}kR\Big[\underbrace{\frac{9}{2} - \sqrt{2 - \cos\phi} - \sqrt{2 + \cos\phi}}_{F(\phi)}\Big]$$

Pto eq.

$$\frac{dV}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{dF(\phi)}{d\phi} = 0$$

PROARTE

$$\frac{dF}{d\phi} = \frac{-\operatorname{sen}\phi}{2\sqrt{2-\cos\phi}} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{2\sqrt{2+\cos\phi}} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2+\cos\phi}} - \frac{1}{\sqrt{2-\cos\phi}}\right]$$

$\operatorname{sen}\phi = 0 \quad \phi_1 = 0 \quad \phi_2 = \pi$ (fuera del intervalo $0 < \phi < \pi$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\cos\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2-\cos\phi}} \rightarrow 2+\cos\phi = 2-\cos\phi$$

$$\Rightarrow \cos\phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{1}{2}kR\,\frac{d^2F}{d\phi^2}$$

$$\frac{dF}{d\phi} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{2}\left[(2+\cos\phi)^{-1/2} - (2-\cos\phi)^{-1/2}\right]$$

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} = \frac{\cos\phi}{2}\left[\ \cancel{\ }\ \right] + \frac{\operatorname{sen}\phi}{2}\left[-\frac{1}{2}(2+\cos\phi)^{-3/2}(-\operatorname{sen}\phi) - \right.$$
$$\left. - \left(-\frac{1}{2}\right)(2-\cos\phi)^{-3/2}\operatorname{sen}\phi\right]$$

$$\left.\frac{d^2F}{d\phi^2}\right|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,2^{-3/2} + \frac{1}{2}\,2^{-3/2}\right]$$

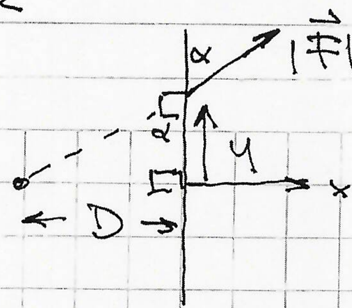
$$= \frac{1}{4}\,\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{1}{2}kR\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}kR > 0$$ P.Eq. ESTABLE

$$\omega_0^2 = \frac{1}{mR^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{k}{R} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

P.2



$$|\vec{F}| = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{D^2+y^2}}$$

$$m\ddot{x} = 0 = |\vec{F}|\operatorname{sen}\alpha - N$$

$$\therefore N = |\vec{F}|\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{\sqrt{D^2+y^2}} \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2+y^2}}$$

$$N = \frac{cD}{D^2+y^2}$$

En $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad y = 0$

$$N = \frac{cD}{D^2} = \frac{c}{D}$$

Valor de y donde

$N(y) = 0.5\,N(0)$

$$\frac{cD}{D^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{c}{D} \rightarrow 2cD^2 = cD^2 + cy^2$$

a) $\boxed{y^* = D}$

b) $m\ddot{y} = |\vec{F}|\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{D^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{D^2+y^2}} = \frac{cy}{D^2+y^2}$

$$m\int_0^{v^*} \dot{y}\,d\dot{y} = c\int_0^D \frac{y\,dy}{D^2+y^2} \rightarrow \frac{m}{2}v^{*2} = c$$

$u = D^2+y^2 \quad du = 2y\,dy \quad c\int_0^D \frac{y\,dy}{D^2+y^2} = \frac{c}{2}\int_{D^2}^{2D^2} \frac{du}{u}$

$$\frac{mv^{*2}}{\cancel{2}} = \frac{c}{\cancel{2}} \ln\frac{2D^2}{D^2}$$

$$\boxed{v^{*2} = \frac{c}{m}\ln 2}$$

P.3 $\vec{F}_1 = -A\, r^3\, \hat{r}$

$$\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = -d\tilde{V} = -A r^3 dr$$

$$\therefore \tilde{V}(r) = \frac{A}{4} r^4 + C$$

$\vec{F}_1$ tiene un potencial asociado. Es conservativa

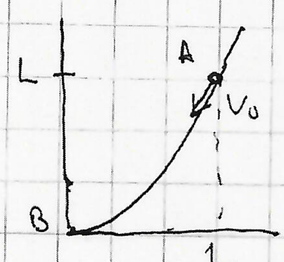
$$\vec{F}_2 = By^2\,\hat{\imath} - Bx^2\,\hat{\jmath}$$

Si $\vec{F}_2$ fuera conservativa entonces $\nabla \times \vec{F}_2 \equiv 0$

$$\nabla \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ By^2 & -Bx^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}\ (-2Bx + 2By)\hat{k}$$

$$= 2B(y-x)\,\hat{k} \neq 0$$

$\therefore \vec{F}_2$ NO es conservativa

b) 

¿Velocidad en $(0,0)$?

$$(E_B - E_A) = \text{TRABAJO DE } \vec{F}_2$$

$$E_A = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{A}{4}\left(\sqrt{2}L\right)^4$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v^{*2} + 0$$

TRABAJO DE $\vec{F}_2$

$$\int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int \left(By^2\hat{\imath} - Bx^2\hat{\jmath}\right) \cdot \left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}\right)$$

$$W = \int By^2 dx - \int Bx^2 dy$$

Pero $y = \frac{x^2}{L}$ $\quad dy = \frac{2x}{L} dx$

$$W_{F_2} = \frac{B}{L^2}\int_L^0 x^4 dx - \frac{2B}{L}\int_L^0 x^3 dx = -\frac{B}{L^2}\frac{L^5}{5} + \frac{2B}{L}\frac{L^4}{4}$$

$$W_{F_2} = BL^3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{10} BL^3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m v^{*2} - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + AL^4\right) = \frac{3}{10} BL^3$$

$$\boxed{v^{*2} = v_0^2 + \frac{A}{m} L^4 + \frac{3}{5} \frac{B}{m} L^3}$$

PROARTE