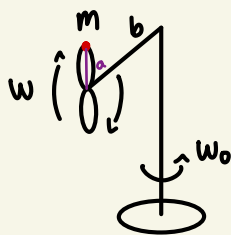
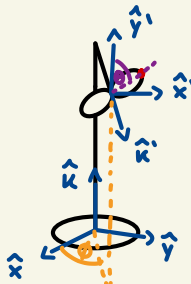
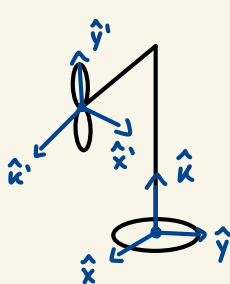


P1]



Lo primero que hay que hacer en un Problema de SRII es poner los sistemas de referencia, lo cual es una decisión arbitraria pero debe ser consistente durante los cálculos:



El 2º dibujo es para ejemplificar el mov y evitar malas interpretaciones.

Ahora identificamos los dos movimientos, el del origen del SRII, dado por:



Circunferencia alrededor de la Varilla central del Ventilador

(Desde arriba)

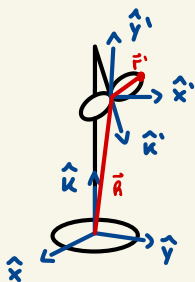


Esta rotación viene dada por ω_0 , que como vector velocidad angular se escribe:

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{k} \quad (\text{Regla de la mano derecha})$$

El otro mov es el de la Partícula dentro del SRII, el cual nuevamente es un mov. circular en torno al eje $\hat{k}'$ pero con velocidad angular $\vec{\omega} = -\omega \hat{k}'$ (sentido horario) y radio a .

Con lo anterior bien definido podemos elegir de que forma representar los Vectores, es decir, que sistema de coordenadas:

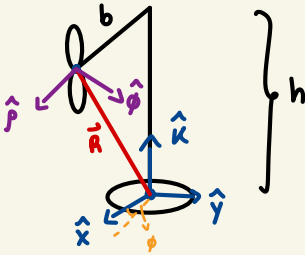


Dado que los dos movimientos son circulares, usamos cilíndricas / Polares.

Ahora hay dos formas de avanzar, calculando todos los pasos o usar los resultados conocidos:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Lo haré de la primera forma para la velocidad: $\vec{F} = \vec{R} + \vec{r}'$



$$\vec{R} = b\hat{p} + h\hat{k}$$

El siguiente paso es derivar c/r al tiempo, para ello es útil recordar lo sgte.

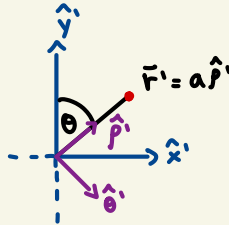
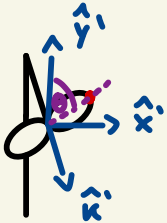
$$\frac{d\hat{p}(\phi)}{dt} = \frac{d\hat{p}}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

↳ si no hay una variable explícita, invéntenla pq probablemente desaparezca.

Con lo anterior nos ahorramos descomponer $\hat{p}$ en $\hat{x}$ e $\hat{y}$, sin embargo, es importante recordar que están fijos, $\dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \vec{0}$.

$$\dot{\vec{R}} = b\dot{\phi}\hat{\phi}, \text{ con } \dot{\phi} = \omega_0, \text{ además notar que } \boxed{\hat{p} = \hat{k} \wedge \hat{\phi} = \hat{x}' \wedge \hat{k} = \hat{y}'} \quad (*)$$

Para $\vec{r}'$,



Por geometría:

$$\hat{p}' = s \cdot \sin\theta \hat{x}' + \cos\theta \hat{y}'$$

Para no usar geometría, usamos:

$$\hat{\phi}' = \frac{d\hat{p}'}{d\phi} = \cos\theta \hat{x}' - \sin\theta \hat{y}'$$



Ahora para derivar hay que tener mucho cuidado, ya que los vectores $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$

No son constantes, así que su derivada temporal no es cero, y se puede calcular con:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \Rightarrow \frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \hat{x}' = (\omega_0 \hat{k}) \times (\hat{p}) = (\omega_0 \hat{y}') \times (\hat{x}') = -\omega_0 \hat{y}'$$

vector base
el que rota

$$\dot{\hat{y}}' = \omega_0 \hat{y}' \times \hat{y}' = \vec{0}$$

↳ hay que buscar una base en común para operar $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$ bases $\{\hat{p}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$ ortonormales ordenadas

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt} (a (s \cdot \sin\theta \hat{x}' + \cos\theta \hat{y}')) = a \cos\theta \dot{\hat{x}}' + a s \cdot \sin\theta \dot{\hat{x}}' - a s \cdot \sin\theta \dot{\hat{y}}' + a \cos\theta \dot{\hat{y}}'$$

$$= a \omega_0 \cos\theta \hat{x}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{y}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{k}'$$

$$= a \omega_0 \hat{\phi}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{k}'$$

Depende solo de la rot. de $\vec{r}'$ las aspas

$\vec{v}'$

$\vec{\omega}_0 \times \vec{r}'$

agrega el propio mov del ventilador

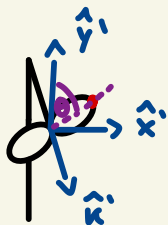
$$\Rightarrow \vec{v} = b \omega_0 \hat{\phi} + a \omega_0 \cos\theta \hat{x}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{y}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{k}'$$

$$= (a \omega_0 \cos\theta + b \omega_0) \hat{x}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{y}' - a \omega_0 s \cdot \sin\theta \hat{k}'$$

↳ Expresamos todo en la misma base, idealmente la no inercial

El módulo se calcula como:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(aw \cos \theta + bw_0)^2 + a^2 w^2 s^2 n^2 \theta + a^2 w_0^2 s^2 n^2 \theta}$$



El punto más alto será cuando $\theta = 0$ y a la altura del brazo cuando $\theta = 90$

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{v}\|(\theta=0) &= aw + bw_0 \\ \|\vec{v}\|(\theta=90) &= \sqrt{(bw_0)^2 + a^2(w^2 + w_0^2)} \end{aligned} \right\}$$

- b) Para la aceleración, haré los cálculos usando la expresión de $\vec{a}$, pero se puede hacer derivando $\vec{v}$, teniendo cuidado con cuales vectores son constantes, cuales rotan, etc.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

vector base
el que rota

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(b\dot{\phi}\hat{\phi}) = b(\ddot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\phi}\dot{\hat{\phi}}) \\ &= b(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}\omega_0\hat{r}) \\ &= -b\omega_0^2\hat{r} \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \Rightarrow \dot{\hat{\phi}} = (\omega_0\hat{k}) \times \hat{\phi} = -\omega_0\hat{r}$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 \wedge \omega_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$$

- $\vec{a}'$ hace referencia a la aceleración medida desde dentro del SMI, es decir, siendo solidario al mov, $\therefore$, las "correcciones No Inerciales" ($\vec{\omega} \times \vec{v}'$) no aparecen, es como si: hicieramos $\frac{d}{dt'}$, tal que, $\frac{d\hat{x}'}{dt'} = \frac{d\hat{y}'}{dt'} = \frac{d\hat{z}'}{dt'} = \vec{0}$.

$$\vec{v}' = aw \cos \theta \hat{x}' - aw s n \theta \hat{y}' = aw \hat{\phi}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d}{dt'}(aw \hat{\phi}') = -aw^2 \hat{r}'$$

- Para el resto de términos hay que tener presentes cual velocidad angular es la que hay que usar. Estos términos son los No inerciales, luego, $\vec{\omega}$ estará asociado a como rota el SMI wr al SRI, entonces es $\vec{\omega}_0$:

$$- 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = 2\omega_0\hat{u} \times (aw \hat{\phi}')$$

$$\begin{aligned} &= 2\omega_0\hat{y}' \times aw(\cos \theta \hat{x}' - s n \theta \hat{y}') \\ &= 2a\omega_0 w \cos \theta (-\hat{u}') \end{aligned}$$

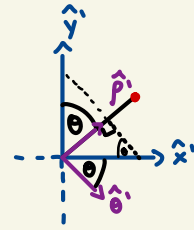
$$- \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' = \vec{0} \times a\hat{r}' = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} - \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}' &= \vec{\omega}_0 \times (\omega_0\hat{u} \times a\hat{r}') \\ &= \vec{\omega}_0 \times (\omega_0\hat{y}' \times a(s n \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{y}')) \\ &= \omega_0\hat{y}' \times a\omega_0 s n \theta (-\hat{k}') \\ &= -a\omega_0^2 s n \theta \hat{x}' \end{aligned}$$

$$-\dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r}' = \vec{0} \times a\hat{p}' = \vec{0}$$

Entonces, la aceleración vale: (Dejemos todo en cilíndricas)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -b\omega_0^2 \hat{p}' - a\omega^2 \hat{p}' - 2a\omega_0\omega \cos\theta \hat{k}' - a\omega_0^2 s.n\theta \hat{x}' \\ &= -b\omega_0^2 \hat{k}' - a\omega^2 \hat{p}' - 2a\omega_0\omega \cos\theta \hat{k}' - a\omega_0^2 s.n\theta (s.n\theta \hat{p}' + \cos\theta \hat{\theta}') \\ &= -(a\omega^2 + a\omega_0^2 s^2 n^2\theta) \hat{p}' - a\omega_0^2 s.n\theta \cos\theta \hat{\theta}' - (b\omega_0^2 + 2a\omega_0\omega \cos\theta) \hat{k}'\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\hat{x}' &= s.n\theta \hat{p}' + \cos\theta \hat{\theta}' \\ \hat{y}' &= \cos\theta \hat{p}' - s.n\theta \hat{\theta}'\end{aligned}$$

En los puntos pedidos:

$$(\theta=0): \vec{a} = -a\omega^2 \hat{p}' - (b\omega_0^2 + 2a\omega_0\omega) \hat{k}'$$

$$(\theta=90): \vec{a} = -(a\omega^2 + a\omega_0^2) \hat{p}' - b\omega_0^2 \hat{k}'$$

c) Tenemos que usar la 2^{da} ley de NEWTON, esta fuerza de adhesión, la podemos pensar como totalmente desconocida y expresarla en su forma más general y dejar que las ecs. den sus valores.

$$\vec{F}_a = F_p \hat{p}' + F_\theta \hat{\theta}' + F_z \hat{k}'$$

$$(\theta=0): -mg \hat{k}' + F_p \hat{p}' + F_\theta \hat{\theta}' + F_z \hat{k}' = m(-a\omega^2 \hat{p}' - (b\omega_0^2 + 2a\omega_0\omega) \hat{k}')$$

$$\Leftrightarrow -mg(\cos\theta \hat{p}' - s.n\theta \hat{\theta}') + F_p \hat{p}' + F_\theta \hat{\theta}' + F_z \hat{k}' = m(-a\omega^2 \hat{p}' - (b\omega_0^2 + 2a\omega_0\omega) \hat{k}')$$

$$\Rightarrow F_p = mg - maw^2$$

$$F_\theta = 0$$

$$F_z = -m(b\omega_0^2 + 2a\omega_0\omega)$$

$$(\theta=90):$$

$$\Leftrightarrow -mg(\cos\theta \hat{p}' - s.n\theta \hat{\theta}') + F_p \hat{p}' + F_\theta \hat{\theta}' + F_z \hat{k}' = m(-(a\omega^2 + a\omega_0^2) \hat{p}' - b\omega_0^2 \hat{k}')$$

$$\Rightarrow F_p = -m(a\omega^2 + a\omega_0^2)$$

$$F_\theta = -mg$$

$$F_z = -mb\omega_0^2$$