Resumen

SRNI

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Fernanda Padró, Gaspar de la Barrera, Álvaro Cifuentes
Ayudantes: Luis Painemal, Constanza Rodríguez

Para comprender a cabalidad los *Sistemas de Referencial No Inerciales*, es necesario tener claro tanto conceptos matemáticos como físicos. Partamos con los primeros:

- Producto Punto/Escalar: (este no es usado como tal pero no está de más recordarlo)

  Esta es una operación matemática que toma dos vectores y retorna un **escalar**. Describe la proyección de un vector sobre otro, como una especie de medida de alineamiento entre los dos. Se define como:

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta$$

  donde θ corresponde al ángulo entre los vectores. Usando esta definición es que se establece si dos vectores son ortogonales ($\theta = 90^o$). Además se define la norma de un vector como:

  $$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

  Por último, si dos vectores comparten una base ortonormal ordenada $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\}$, el producto punto se escribe como:

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1\hat{e_1} + a_2\hat{e_2} + a_3\hat{e_3}) \cdot (b_1\hat{e_1} + b_2\hat{e_2} + b_3\hat{e_3}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

  En $\mathbb{R}^N$, el producto escalar cumple con las propiedades de **conmutatividad** , **distributividad**, **linealidad**, entre otras.

- Producto Cruz/Vectorial:

  Este es una operación matemática que toma dos vectores y retorna un **vector** perpendicular a ambos dictado por la regla de la mano derecha.

  $$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta$$

  donde θ corresponde al ángulo entre los vectores. Usando esta definición es que se establece si dos vectores son paralelos ($\theta = 0^o$).

Por último, si dos vectores comparten una base ortonormal ordenada $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\}$, el producto cruz se escribe como:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (a_1\hat{e_1}+a_2\hat{e_2}+a_3\hat{e_3})\times(b_1\hat{e_1}+b_2\hat{e_2}+b_3\hat{e_3}) = (a_2b_3-a_3b_2)\hat{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{e_3}$$

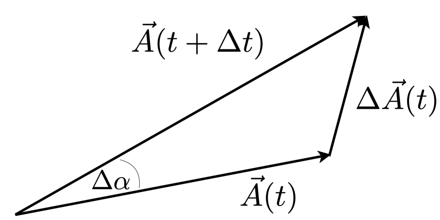
Aparte de esta forma de calcularlo, existen otros métodos, como el del determinante o usando el símbolo de *levi-civita* .

En $\mathbb{R}^N$, el producto vectorial cumple con las propiedades de **anti-conmutatividad** ($\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$), **distributividad**, **linealidad**, entre otras.

- Velocidad Angular y Derivada Temporal de un vector:

  Sea $\vec{A}(t)$ un vector cuya dirección cambia con el tiempo, es decir, $\vec{A}(t)$ rota respecto a un eje. En estos casos, se puede definir una velocidad angular, $\vec{\omega}_A$, asociada a dicha rotación, la cual se escribe como:

$$\vec{\omega}_A \equiv \frac{1}{\|\vec{A}\|^2}\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt} \implies \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}\frac{d}{dt}\|\vec{A}\| + \vec{\omega}_A\times\vec{A}$$



  Notemos qué pasa para los vectores ortonormales de una base, $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\}$. Estos por definición tienen módulo igual a 1, por lo tanto, no cambian su magnitud, anulándose el primer término de la definición anterior.

$$\frac{d\hat{e_1}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{e_1}, \quad \frac{d\hat{e_2}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{e_2}, \quad \frac{d\hat{e_3}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{e_3}$$

  Y por último, si tampoco rotan ($\vec{\omega} = \vec{0}$), entonces su magnitud, dirección y sentido son constantes en el tiempo.

- Sistema de Referencia Inercial y No Inercial:

  Para empezar, un Sistema de Referencia se compone de una base de vectores cartesianos y un origen, que servirán de convención para los cálculos. Un SRI es un sistema en el que se preservan las leyes de Newton, debido a que el sistema está en reposo o haciendo un MRU.

  Por otro lado, un SRNI es uno en donde, respecto a un SRI, existe una aceleración o una velocidad angular, provocando que se deje de cumplir la segunda ley de Newton, por la aparición de fuerzas ficticias.

En estricto rigor, un Sistema de Referencia no es lo mismo que un Sistema de Coordenadas, el primero es un marco físico para hacer mediciones basándose en un origen y una orientación, el segundo es una herramienta matemática para describir las posiciones respecto a ejes definidos en función del SR y un set de variables, ya sea, distancias cartesianas a un origen, un radio, un ángulo, etc.

Finalmente, la forma en que se modifican las ecuaciones de Newton para una partícula en un SRNI es mediante la separación del movimiento en dos partes, una se encarga de seguir la traslación del SRNI, a través de un vector que conecta los orígenes, $\vec{R}$, y la otra, la rotación dada por $\vec{\omega}$, que estudia a la partícula desde dentro del SRNI, $\vec{r}'$, siendo solidaria a este.

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_i'(t)$$

Entonces veamos en detalle cada vector. Partamos con $\vec{R}(t)$.

Como se mencionó antes, este se encarga de medir la traslación del origen del SRNI respecto al SRI, por lo tanto, no tiene una rotación asociada ($\vec{\omega} = \vec{0}$). Podemos expresarlo en la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y posteriormente derivarlo, recordando los resultados anteriores, como:

$$\begin{aligned}
\vec{R}(t) &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} \\
\frac{d\vec{R}(t)}{dt} &= (\dot{R}_x\hat{\imath} + R_x\dot{\hat{\imath}}) + (\dot{R}_y\hat{\jmath} + R_y\dot{\hat{\jmath}}) + (\dot{R}_z\hat{k} + R_z\dot{\hat{k}}) \\
&= \dot{R}_x\hat{\imath} + \dot{R}_y\hat{\jmath} + \dot{R}_z\hat{k}
\end{aligned}$$

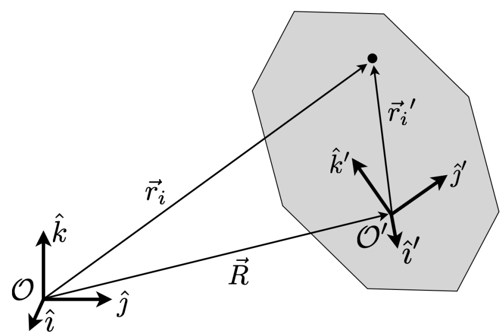


Figura 1: Sistema de Referencia No Inercial

Por otro lado, el vector $\vec{r}_i'(t)$ es la descripción de la posición de la partícula dentro del SRNI, el cual está rotando respecto al SRI con una velocidad angular $\vec{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i'(t) &= x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}' \\
\frac{d\vec{r}_i'(t)}{dt} &= (\dot{x}'\hat{\imath}' + x'\dot{\hat{\imath}}') + (\dot{y}'\hat{\jmath}' + y'\dot{\hat{\jmath}}') + (\dot{z}'\hat{k}' + z'\dot{\hat{k}}') \\
&= (\dot{x}'\hat{\imath}' + \dot{y}'\hat{\jmath}' + \dot{z}'\hat{k}') + ([x'\vec{\omega} \times \hat{\imath}'] + [y'\vec{\omega} \times \hat{\jmath}'] + [z'\vec{\omega} \times \hat{k}']) \\
&= (\dot{x}'\hat{\imath}' + \dot{y}'\hat{\jmath}' + \dot{z}'\hat{k}') + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'
\end{aligned}$$

Luego, una derivada temporal de algún vector la podemos dividir en dos partes, la derivada de *toda la vida* y la corrección No Inercial.

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{O}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{O}'} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Con esta última noción es que haremos los cálculos para llegar a la expresión de la segunda ley de Newton en un SRNI (recordar que todo lo que esté con primas, es parte del sistema no inercial).

Retomemos la velocidad encontrada antes y derivemos para llegar a la aceleración:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\
\vec{a} &= \ddot{\vec{R}} + (\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}') + \left(\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right) \\
&= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'
\end{aligned}
$$

Ahora escribimos la 2da ley de Newton:

$$
\begin{aligned}
& m\vec{a} = \sum F_{reales} \\
\implies \quad & m\vec{a}' = \sum F_{reales} - m\ddot{\vec{R}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'
\end{aligned}
$$

Podemos identificar cada término por:

- **Fuerzas Reales**, $\sum F_{reales}$: Corresponden a las fuerzas producidas por un agente físico real, por ejemplo, gravedad, tensión, fuerza elástica, etc.
- **Fuerza de traslación del sistema de referencia**, $-m\ddot{\vec{R}}$: Aparece si el sistema no inercial tiene aceleración lineal. Se conoce también como *fuerza ficticia de traslación*.
- **Fuerza de Coriolis**, $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$: Actúa sobre objetos que se mueven dentro del SRNI. Es proporcional a la velocidad relativa $\vec{v}'$ y se dirige perpendicularmente tanto a $\vec{v}'$ como a $\vec{\omega}$.
- **Fuerza de Euler**, $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$: Se presenta cuando la velocidad angular del sistema $\vec{\omega}$ varía con el tiempo (i.e., hay aceleración angular).
- **Fuerza centrífuga**, $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$: Depende de la posición relativa $\vec{r}'$ en el sistema rotante y de la velocidad angular $\vec{\omega}$. Siempre apunta hacia afuera del eje de rotación.

Las 4 últimas fuerzas son conocidas como **Fuerzas Ficticias**, ya que, son producidas meramente por el movimiento de un sistema que acelera o rota respecto a otro quieto (o en MRU), y no, por ejemplo, por un objeto con masa o un resorte.