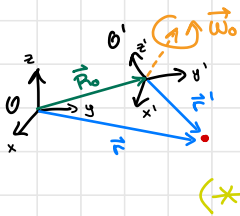


Pauta Aux 20.

Sistema de Referencia no Inercial (SRNI)



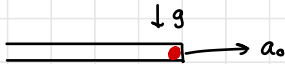
$$m(\ddot{\mathbf{a}}' + \ddot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r}' + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')) = \vec{F}$$

$$m\ddot{\mathbf{a}}' = \vec{F} - m\ddot{\mathbf{a}}_0 + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}_0 + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}_0 + m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \times \vec{\omega}_0$$

Coriolis

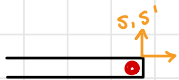
F. centrífuga

P1)

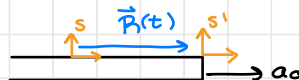


$$\vec{F} = -cm\vec{v}', \quad \vec{v}' \text{ vel. relativa al tubo}$$

Lo 1º que hay que hacer en este tipo de problemas es definir mi sistema de referencia inercial S (fijo) y mi sistema de ref. no inercial S' (móvil)



avanza el tiempo →



en $t=0$ parten juntos

S se queda fijo en su posición inicial y
S' se mueve pegado al tubo

Luego el vector $\vec{R}$ que separa ambos sist. de ref. es

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \hat{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}}(t) = a_0 t \hat{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = a_0 \hat{x}$$

este es el $\ddot{\mathbf{a}}_0$ que entra en la fórmula

(*)

Como es un movimiento lineal, no hay necesidad de rotar mi SRNI

$$\Rightarrow \vec{\omega}_0 = 0$$

esto hace que todas las fzas ficticias que dependan de ω_0 serán cero (Centrífuga, Coriolis, etc.). Además, como no rota $\hat{x} = \hat{x}'$, $\hat{y} = \hat{y}'$

∴ la ec. de movimiento en S' será

$$\hat{x}] \quad m\ddot{x}' = -cm\dot{x}' - ma_0$$

$$\text{con } \dot{x}'(t=0) = 0$$

$$x'(t=0) = 0$$

sol. homogénea es $\dot{x}'_h(t) = A e^{-ct}$

sol. particular es $\dot{x}'_p(t) = -\frac{a_0}{c}$

$$\text{Así } \dot{x}'(t) = A e^{-ct} - \frac{a_0}{c} \quad \left(\text{CI: } \dot{x}'(t=0) = 0 = A - \frac{a_0}{c} \right) \\ \Rightarrow A = \frac{a_0}{c} \\ = \frac{a_0}{c} (e^{-ct} - 1)$$

Ahora para encontrar la rapidez en el sist. fijo, notamos que

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}' \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}' + a_0 t \\ \text{vel. de } S' + \text{vel. de la partícula medida en } S' \\ = a_0 t + \frac{a_0}{c} (e^{-ct} - 1)$$

b) Con esto, podemos calcular la fza de roce en función de t

$$\vec{F}_r = -c m \dot{x}' \hat{x} = -m (e^{-ct} - 1) \hat{x} = m (1 - e^{-ct}) \hat{x}$$

c) la posición relativa al sistema externo es $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + x'$

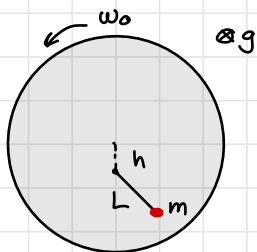
Para encontrar x' , integramos $\dot{x}'$

$$x'(t) = \int_0^t \frac{a_0}{c} (e^{-ct'} - 1) dt' \\ = \frac{a_0}{c} \left(-\frac{e^{-ct'}}{c} \Big|_0^t - t \right) \\ = \frac{a_0}{c} \left(\frac{1 - e^{-ct}}{c} - t \right)$$

Wego

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{a_0}{c} \left(\frac{1 - e^{-ct}}{c} - t \right)$$

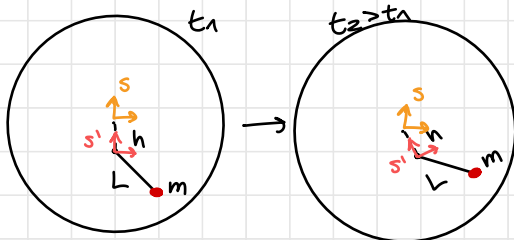
P21



Tenemos que

- ▷ encontrar pos. eq.
- ▷ período de eq. osc.

¿Cómo elegimos el sist. S y S'?



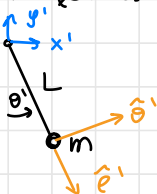
escribimos en polares
 $\hat{p} = (\sin \omega_0 t, -\cos \omega_0 t)$

$$\vec{r}_0 = h \hat{p} \Rightarrow \vec{v}_0 = h \omega_0 \hat{\theta} \Rightarrow \vec{a}_0 = -h \omega_0^2 \hat{p} \quad \text{pero } \hat{p} = -\hat{y}'$$

$$= h \omega_0^2 \hat{y}'$$

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{z}' \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_0 = 0$$

En el sistema S' simplemente tenemos un péndulo, ∴ usaremos polares, ya que es conveniente



Calculamos las fzas ficticias una por una

$$\triangleright -m \vec{a}_0 = -m h \omega_0^2 \hat{y}' = -m h \omega_0^2 (-\cos \theta' \hat{p}' + \sin \theta' \hat{\theta}') \quad \hat{p}' = -\hat{y}'$$

$$\triangleright m \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}_0 = m L \hat{p}' \times 0 = 0$$

$$\triangleright 2m \vec{v}' \times \vec{\omega}_0 = 2m L \dot{\theta}' \hat{\theta}' \times \omega_0 \hat{z}' = 2m L \dot{\theta}' \omega_0 \underbrace{\hat{\theta}' \times \hat{z}'}_{\hat{p}'}$$

$$\triangleright m (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \times \vec{\omega}_0 = m (\omega_0 \hat{z}' \times L \hat{p}') \times \omega_0 \hat{z}'$$

$$= m L \omega_0^2 \underbrace{\hat{\theta}' \times \hat{z}'}_{\hat{p}'}$$

Así, la ec. de movimiento en $\hat{\theta}'$ es (la ec. en $\hat{p}'$ sólo afecta al valor de la tensión)

$$m L \ddot{\theta}' = -m h \omega_0^2 \sin \theta'$$

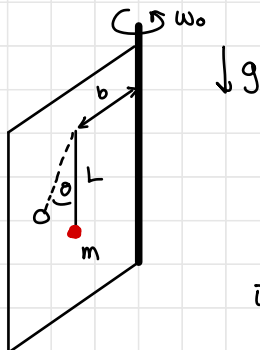
El equilibrio claro. es $\theta' = 0$ y aproximamos $\theta' \ll 1$, así $\sin \theta' \approx \theta'$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{h\omega_0^2}{L}}_{\Omega_0^2 \text{ freq. peg. osc.}} \theta = 0$$

así

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{L}{h}}$$

P3)



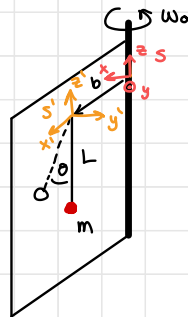
a) 1º elegir S y S'

así

$$\vec{R}_0 = b(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0)$$

$$= b\hat{p}$$

$$\vec{a}_0 = -b\omega_0^2 \hat{p}$$



$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{z} = \omega_0 \hat{z}'$$

Vamos a escribir $\vec{r}' = L(\sin \theta \hat{x}' - \cos \theta \hat{z}')$ (posición de la masa en S')

$$\Rightarrow \vec{v}' = L\dot{\theta}(\cos \theta \hat{x}' + \sin \theta \hat{z}')$$

$$\triangleright -m\vec{a}_0 = mb\omega_0^2 \hat{x}'$$

$$\triangleright m\vec{r}' \times \vec{\omega}_0 = 0 \quad \text{porque } \omega_0 = \text{cte}$$

$$\triangleright 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}_0 = 2mL\dot{\theta}(\cos \theta \hat{x}' + \sin \theta \hat{z}') \times \omega_0 \hat{z}'$$

$$= 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta \underbrace{\hat{x}' \times \hat{z}'}_{-\hat{y}'}$$

$$\triangleright m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \times \vec{\omega}_0 = m(\omega_0 \hat{z}' \times L(\sin \theta \hat{x}' - \cos \theta \hat{z}')) \times \omega_0 \hat{z}'$$

$$= m\omega_0^2 L \sin \theta \underbrace{\hat{y}' \times \hat{z}'}_{\hat{x}'}$$

Ahora

$$\Rightarrow \hat{x}' = \sin \theta \hat{p}' + \cos \theta \hat{\theta}'$$

$$\hat{z}' = \sin \theta \hat{\theta}' - \cos \theta \hat{p}'$$

$$\triangleright F = -mg\hat{z}' = -mg(\sin \theta \hat{\theta}' - \cos \theta \hat{p}')$$

ec. mov en $\hat{\theta}'$

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin \theta + mb\omega_0^2 \cos \theta + mL\omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \quad (i)$$

b)

$\hat{y}'$ es la dirección normal a la placa, mientras no se despreque $\ddot{y}' = 0$

$$m\ddot{y}' = N - 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow N = 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta$$

Queremos encontrar el máximo de N

Para eso, 1° necesitamos $\ddot{\theta}$

Usamos el mecatruco en (i)

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \left(-\frac{g}{L} \sin \theta' + \frac{b}{L} \omega_0^2 \cos \theta' + \omega_0^2 \sin \theta' \cos \theta' \right)$$

parte en reposo $\dot{\theta}_0 = 0$
y en posición vertical $\theta_0 = 0$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{L} (\cos \theta - 1) + \frac{b}{L} \omega_0^2 \sin \theta + \frac{\omega_0^2}{2} \sin^2 \theta$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \theta - 1) + \omega_0^2 \sin \theta \left(\frac{2b}{L} + \sin \theta \right)} \quad (ii)$$

Así queremos encontrar el máximo de

$$\sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \theta - 1) + \omega_0^2 \sin \theta \left(\frac{2b}{L} + \sin \theta \right)} \cos \theta, \text{ derivamos e igualamos a cero}$$

$$-\sin \theta^* \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \theta^* - 1) + \omega_0^2 \sin \theta^* \left(\frac{2b}{L} + \sin \theta^* \right)} + \cos \theta^* \left(-\frac{2g}{L} \sin \theta^* + \omega_0^2 \cos \theta^* \left(\frac{2b}{L} \sin \theta^* \right) + \omega_0^2 \sin \theta^* \cos \theta^* \right) = 0$$

$$-2 \sin \theta^* \left(\frac{2g}{L} (\cos \theta^* - 1) + \omega_0^2 \sin \theta^* \left(\frac{2b}{L} + \sin \theta^* \right) \right) + \cos \theta^* \left(-\frac{2g}{L} \sin \theta^* + \omega_0^2 \cos \theta^* \left(\frac{2b}{L} \sin \theta^* \right) + \omega_0^2 \sin \theta^* \cos \theta^* \right) = 0$$

$$\sin^3 \theta^* (-2\omega_0^2) + \cancel{\sin \theta^*} \cos^2 \theta^* \left(\frac{2b}{L} \omega_0^2 + \omega_0^2 \right)$$

$$-2\omega_0^2 \frac{2b}{L} \sin^2 \theta^* + \cancel{\sin \theta^*} \cos \theta^* (-4g/L - 2g/L)$$

$$+ \frac{2g}{L} \cancel{\sin \theta^*} = 0$$

no creo que tenga solución analítica, o bonita sin hacer simplificaciones

$$-2\omega_0^2 \sin^2 \theta^* + \omega_0^2 \left(\frac{2b}{L} + 1 \right) \cos^2 \theta^* - 4\omega_0^2 \frac{b}{L} \sin \theta^* - \frac{6g}{L} \cos \theta^* + \frac{2g}{L} = 0$$

θ^* es la solución de esa ecuación ssi $\theta^* \in [0, \theta_{\max}]$

donde $\theta_{\max}$ es la solución de $\dot{\theta} = 0$

$$\frac{2g}{L} (\cos \theta_{\max} - 1) + \omega_0^2 \sin \theta_{\max} \left(\frac{2b}{L} + \sin \theta_{\max} \right) = 0$$

b) Para que se despegue, $N=0$, es decir

$$0 = 2mL\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta$$

Entonces $\underbrace{\dot{\theta} = 0}_{\theta_{\text{despegue}} = \theta_{\text{max}}} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\cos \theta = 0}_{\theta_{\text{despegue}} = \pi/2}$

Como $\theta \in [0, \theta_{\text{max}}]$ el despegue será en θ_{max} si $\theta_{\text{max}} < \pi/2$
y será en $\pi/2$ si $\theta_{\text{max}} \geq \pi/2$