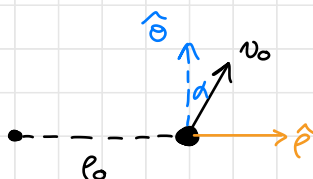


Pauta Aux 18

P1)



$$\vec{F} = -\frac{km}{r^2} \hat{r}$$

Nos piden 2 cosas

1) Máximo alejamiento $r_1 \iff$ encontrar r_1 tal que $\dot{r}(r_1) = 0$

2) Rapidez en ese punto $\iff v(r_1)$

Es decir, en ambos casos hay que usar una relación entre rapidez y posición. Para esto es útil la energía.

$$\begin{aligned} \text{Notamos que } V &= -\frac{km}{r}, \text{ ya que } -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{km}{r} \right) \hat{r} \\ &= -\frac{km}{r^2} \hat{r} = \vec{F} \end{aligned}$$

Luego, para cualquier r ,

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{km}{r}$$

Hay un $\dot{\theta}^2$ molestando que se elimina usando la cons. del momento angular. Esto no es más que notar que al no haber fzas en la dirección $\hat{\theta}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(m (r^2 \dot{\theta}) \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \implies r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

esta constante es el momento angular (dividido por m) llamémosle l

$$\begin{aligned} \text{Usamos la cond. inicial } \vec{v}_0 &= v_0 \sin \alpha \hat{r} + v_0 \cos \alpha \hat{\theta} \\ &= \dot{r}(t=0) \hat{r} + r_0 \dot{\theta}(t=0) \hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies r^2 \dot{\theta} &= r_0 v_0 \cos \alpha \\ &\implies \underbrace{r_0^2 \dot{\theta}(t=0)}_l = v_0 \cos \alpha r_0 \\ l &= r_0 v_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Así } \dot{\theta} = \ell_0 v_0 \cos \alpha / \ell^2$$

Ahora sí

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{\ell}^2 + \cancel{\ell^2} \ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha / \cancel{\ell^4} \ell^2) - \frac{km}{\ell}$$

$$E(\ell(t)) = \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 + \frac{m \ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2 \ell^2} - \frac{km}{\ell}$$

Ahora sí usamos cons. de Energía, queremos
que E_{final} sea el ℓ máximo, es decir $\dot{\ell} \stackrel{!}{=} 0$

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{km}{\ell_0}$$

$$E_{\text{final}} = \cancel{\frac{1}{2} m \dot{\ell}^2} + \frac{m \ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2 \ell_1^2} - \frac{km}{\ell_1}$$

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} : \quad \cancel{\frac{1}{2} m} (v_0^2 - \frac{2k}{\ell_0}) \ell_1^2 = \cancel{\frac{1}{2} m} (\ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha - 2k \ell_1)$$

$$(v_0^2 - \frac{2k}{\ell_0}) \ell_1^2 + 2k \ell_1 - \ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ell_1 = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 + 4(v_0^2 - \frac{2k}{\ell_0}) \ell_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2(v_0^2 - \frac{2k}{\ell_0})}$$

¿qué signo elegir?

La solución correcta depende de los valores v_0, k, ℓ_0, α , etc.

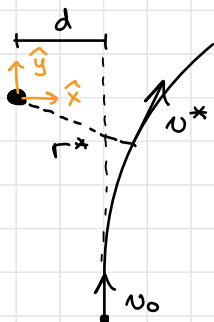
Así que lo dejaremos así, sólo recordar que ℓ_1 debe ser > 0
y que la rapidez se calcularía como

$$v = \ell_1 \dot{\theta}_1 = \frac{\ell_0 v_0 \cos \alpha}{\ell_1} //$$

porque no hay
velocidad en la
dirección radial

$$\dot{\rho} = 0$$

P21



$$\vec{F} = + \frac{km}{r^2} \hat{r}$$

Hacemos lo mismo que antes, notar que

$$V(r) = \frac{km}{r}$$

Al igual que antes, usaremos conservación del momento angular, ahora por definición

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m |\vec{r} \times \vec{v}|$$

en el momento inicial

$$\vec{r} = d\hat{x} - y\hat{y}$$

$$\vec{v} = v_0\hat{y}$$

y muy grande, $\rightarrow \infty$, pero vamos a ver que da lo mismo

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = dv_0\hat{x} \times \hat{y} - v_0y\hat{y} \times \hat{y} = dv_0\hat{z}$$

luego $L = mdv_0$

y en el punto más cercano $L = mr^*v^*$ (porque la vel. es $\perp$ a $\vec{r}$)

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (\text{como está muy lejos, } r_0 \rightarrow \infty, V=0)$$

$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{km}{r^*}$$

Entonces tenemos 2 ecs

(cons. Energía)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{km}{r^*}$$

(cons. mom. angular)

$$mdv_0 = mr^*v^* \Rightarrow$$

$$v^* = \frac{dv_0}{r^*}$$

reemplazamos en la otra ec.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{d^2v_0^2}{r^{*2}} + \frac{km}{r^*} \quad (*)$$

$$v_0^2 r^{*2} = d^2 v_0^2 + 2kr^*$$

$$\Rightarrow r^* = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 + 4v_0^2 d^2 v_0^2}}{2v_0^2}$$

$$r^* = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + v_0^4 d^2}}{v_0^2}$$

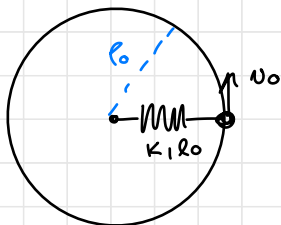
Como $\sqrt{k^2 + v_0^4 d^2} > k$ el signo $(-)$ está prohibido (r debe ser > 0)
 luego

$$r^* = \frac{k}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{v_0}\right)^2 + d^2}$$

Usando $(*)$

$$v^* = \frac{dv_0}{\frac{k}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{v_0}\right)^2 + d^2}} //$$

P3



$$\rho_0 = 2l_0$$

a) aceleración centrípeta $a_r = -\frac{v_0^2}{\rho_0}$

ec. en $\hat{r}$: $-m \frac{v_0^2}{\rho_0} = -K(\rho_0 - l_0)$

$$v_0^2 = \frac{K}{m} 2l_0 (2l_0 - l_0)$$

$$= 2l_0^2 \frac{K}{m}$$

b) La idea de la perturbación radial es que ahora ρ varía y la velocidad $\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}$

Como hay fza central $\Rightarrow$ cons. mom. angular: $m v_0 \rho = m v_0 \rho_0$
 $\rho^2 \dot{\theta} = v_0 \rho_0$
 $\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2 \rho_0^2}{\rho^4}$

Por lo tanto, la energía es

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot{\rho}^2}_{v^2} + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} K (\rho - l_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \frac{v_0^2 \rho_0^2}{\rho^2} + \frac{1}{2} K (\rho - l_0)^2$$

todo lo que depende de ρ

a esto se le llama potencial efectivo: $V_{\text{eff}}(\rho)$

Como queremos pequeñas oscilaciones, expandiré $V_{\text{eff}}(\rho)$ entorno a $\rho_0 = 2l_0$ con una serie de Taylor

don lo mismo las ctes en la Energía

$$E(\rho) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \cancel{V_{\text{eff}}(\rho_0)} + V'_{\text{eff}}(\rho_0) (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(\rho_0) (\rho - \rho_0)^2$$

Defino $\epsilon(t) = \rho(t) - \rho_0 \Rightarrow \dot{\rho} = \dot{\epsilon}$ y me pongo a calcular

$$V'_{\text{eff}}(\rho) \Big|_{\rho_0} = -m v_0^2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^3} + K(\rho_0 - l_0) = -m \underbrace{2l_0^2 \frac{K}{m}}_{v_0^2} \frac{1}{2l_0} + K l_0$$

$$= -K l_0 + K l_0 = 0$$

$$V''_{\text{eff}}(r) \big|_{r=r_0} = 3m \frac{U_0^2 r_0^2}{r_0^4} + K = 3m \frac{2U_0^2 K}{m \cdot 4r_0^2} + K$$

$$= \frac{3}{2}K + K = \frac{5}{2}K$$

Así

$$E(r_0 + \epsilon) = \frac{1}{2} m \dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} \frac{5}{2} K \epsilon^2$$

Comparando con la energía de un oscilador armónico $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ notamos

$$m \omega^2 = \frac{5}{2} K \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{5K}{2m}}$$

y el período es $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5K}}$

Obs: la fórmula para la frec. de pequeñas osc. sería

$$\omega_0^2 = \frac{V''_{\text{eff}}(x_{\text{eq}})}{m}, \text{ que es lo mismo que ya conocíamos}$$

pero cambiando el potencial por el potencial efectivo.