Mecánica FI2001-2 - Otoño 2025
Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliar: Gaspar de la Barrera
José Muñoz
Fernanda Padró
Ayudantes: Luis Painemal
Constanza Rodríguez

Pauta Auxiliar 12

P1. *a)* Como nos piden determinar la rapidez $|\vec{v}|$ en el punto $(\rho_2 = \rho_1/2)$ debemos inmediatamente pensar en resolverlo por medio de energías o mecatruco, luego, como solo nos piden un valor escalar, sin una dirección en particular elegiremos energías!.

Es posible observar en el ejercicio que solo actua la fuerza del resorte, en conjunto con la normal, como esta ultima es siempre perpendicular a la superficie(recordemos que de momento trabajmos con masas puntuales!, por lo que en una proximación infinitesimal la normal es perpendicular a la superficie y apunta al centro **O**), entonces se tiene que $\Delta E = 0$ por fuerzas conservativas.
Dibujo

Sabemos que la normal ejerce una fuerza sobre la masa, por lo que debe poseer un potencial asociado a ella, para obtener el potencial de un resorte cualquiera debemos aislarlo del sistema, consideremos el siguiente resorte
Dibujo

Sabemos que la fuerza ejercida por este resorte sobre la masa está dada por la Ley de Hooke

$$\vec{F} = -K(\rho - l_o)\hat{\rho}$$

El diferencial de energía potencial de cualquier fuerza conservativa está dada por la fuerza paralela al desplazamiento de la masa, esto no es más que

$$-dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Sabemos que el resorte solo actúa en $\hat{\rho}$, y que el desplazamiento infinitesimal está dado por:

$$d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta} + z\hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\rho d\rho = -K(\rho - lo)d\rho = -dU_r$$

$$U_r = \int K(\rho - l_o)d\rho = \frac{1}{2}K(\rho - l_o)^2 + C$$

Como la constante de integración de un potencial es arbitraria, elegiremos por convención que es nula $(C = 0)$.

Es conocido que sus condiciones iniciales son $v_o = 0; \rho_0 = \rho_1$, mientras que sus finales son $v_f = ?; \rho_2 = \rho_1/2$. Por lo que en ecuaciones de energía esto queda como:

$$E_o = \frac{1}{2}K\rho_1^2 = E_f = \frac{1}{2}K\rho_2^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Recordemos que el resorte no posee largo natural!, por lo que siempre se encuentra estirado, y por lo tanto apuntando al centro de giro, luego, resolvemos para v_f.

$$v_f^2 = \frac{K}{m}(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \frac{K}{m}(\rho_1^2 - \frac{1}{4}\rho_1^2) = \frac{3K}{4m}\rho_1^2 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{3K}{4m}}\rho_1$$

b) Debemos determinar la Fuerza Centripeta ejercida sobre el bloque, como la curva es complicada utilizaremos intrinsecas!

$$F_c = ma_n = m\frac{v^2}{R_c}; R_c = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

Como tenemos la expresión explicita de ρ, entonces aprovecharemos de obtener sus derivadas para reemplazarlas en la velocidad y aceleración.

$$\rho = \rho_0 e^{a\theta}$$
$$\dot{\rho} = a\dot{\theta}\rho_o e^{a\theta} = a\dot{\theta}\rho$$
$$\ddot{\rho} = (a\dot{\theta})^2\rho + a\rho\ddot{\theta} = a\rho(\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2)$$

Esto modifica la aceleración en ρ de la siguiente manera:

$$a_p = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = a\rho(\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2) - \rho\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \rho\ddot{\theta} + 2a\rho\dot{\theta}^2 = \rho(\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2)$$

Finalmente, nuestro vector aceleración queda como:

$$\vec{a} = a_\rho\hat{\rho} + a_\theta\hat{\theta} = (a\rho(\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2) - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + \rho(\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2)\hat{\theta}$$

Ahora nuestra velocidad, la cual está dada por:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = a\rho\dot{\theta}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = \rho\dot{\theta}(a\hat{\rho} + \hat{\theta})$$

Observemos que el factor a tiene una gran importancia!, pues cuanta mayor sea, mayor será la velocidad hacia el centro!, y esto lo reflejan nuestras ecuaciones.

Para el producto vectorial, usaremos:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} a_\rho & a_\theta & a_z \\ v_\rho & v_\theta & v_z \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{z}} \end{vmatrix}$$

Parece dificil!, pero recordemos que nos encontramos en un plano, por lo que $a_z = v_z = 0$, con esta simplificación solo nos quedan los valores:

$$\vec{a} \times \vec{v} = (a_\rho v_\theta - a_\theta v_\rho)\hat{z} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{v}| = a_\rho v_\theta - a_\theta v_\rho$$

con el valor del producto cruz encontrado, solo nos queda reemplazar los valores conocidos:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a_\rho v_\theta - a_\theta v_\rho = (a\rho(\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2) - \rho\dot{\theta}^2) * \rho\dot{\theta} - \rho(\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2) * a\rho\dot{\theta}$$

como tenemos tantos términos, es conveniente expandirlos y ver cuales se anulan y simplificar lo más posible!.

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \rho^2\dot{\theta}(a\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2(a^2 - 1)) - a\rho^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2)$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \rho^2\dot{\theta}^3(a^2 - 1) - 2a^2\rho^2\dot{\theta}^3$$
$$|\vec{a} \times \vec{v}| = -\rho^2\dot{\theta}^3(a^2 + 1)$$

Como es un modulo, debe ser positivo, por lo que la elección de $|\vec{a} \times \vec{v}| = a_\rho v_\theta - a_\theta v_\rho$ debio ser con un menos, al hacer el cambio obtenemos:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = \rho^2\dot{\theta}^3(a^2 + 1)$$

Luego, nuestra rapidez es $v = |\rho\dot{\theta}(a\hat{\rho} + \hat{\theta})| = \rho\dot{\theta}\sqrt{a^2 + 1}$

$$v^3 = \rho^3\dot{\theta}^3\sqrt{a^2 + 1}^3$$

tal que el radio de giro es:

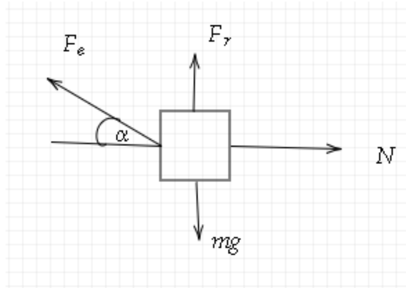
$$R_c = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|} = \frac{\rho^3\dot{\theta}^3\sqrt{a^2 + 1}^3}{\rho^2\dot{\theta}^3(a^2 + 1)} = \rho\sqrt{a^2 + 1}$$

y la Fuerza centripeta en el punto $\rho_2 = \rho_1/2$ es

$$F_c(\rho_2) = m\frac{v_f^2}{R_c} = m\frac{\frac{3K}{4m}\rho_1^2}{\rho_2\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{a^2 + 1}}K\rho_1$$

Con lo que se concluye lo pedido

P2. *a*) Primeramente para el ejercicio haremos un DCL en un punto arbitrario de la trayectoria:



En donde descomponiendo por componentes las fuerzas podemos encontrar que para x:

$$\hat{x})m\ddot{x} = N - F_e cos(\alpha)$$

Como el bloque se mantiene estático en el eje x, entonces $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, luego, podemos observar que: en donde

$$cos(\alpha) = \frac{D}{\sqrt{D^2 + y^2}}$$
$$sen(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}}$$

Observemos que eltiramiento del resorte no es más que $\sqrt{(D^2 + y^2)}$, ya que no posee largo natural. luego, la cantidad de Fuerza elastica queda dadá por la ley de Hooke,

$$F_e = -k\sqrt{D^2 + y^2}$$

de tal manera que,

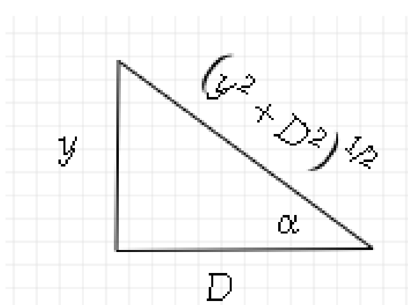
$$F_e cos(\alpha) = \frac{-kD\sqrt{D^2 + y^2}}{\sqrt{D^2 + y^2}} = -kD$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento de x, obtenemos que

$$N = F_e Cos(\alpha) = -kD \rightarrow |N| = kD$$

La cual es una constante durante la totalidad de la trayectoria, y se compone solo de valores conocidos!.

b) Para determina y_{max} utilizaremos el clasico mecatruco. Para esto analizaremos el movimiento en y.



$$\hat{y})m\ddot{y} = mg - F_eSen(\alpha) - F_r = mg - ky - N\mu_c = mg - ky - kDay$$

$$\ddot{y} = g - ky(1 - aD)$$

Lo cual parece extraño a primera vista, pero al analizar μ_c obtenermos que las dimensiones de a son $\frac{1}{D}$, por lo que aD es adimensional y correcto!.

En virtud del mecatruco obtenemos

$$\int_0^0 \dot{y}d\dot{y} = 0 = \int_0^{y_{max}} (g - \frac{k}{m}y(1 - aD))dy$$

Resolviendo la integral para y_{max}, obtenemos que

$$g - \frac{k}{m}y_{max}(1 - aD) = 0 \rightarrow y_{max} = \frac{mg}{k(aD - 1)}$$

c) Para obtener el trabajo ejercido por cada fuerza, debemos calcular su desplazamiento, y la fuerza paralela al desplazamiento, bajo estas normas podemos directamente descartar la normal N, ya que esta actua en x, en el cual el desplazamiento es nulo. Luego, para el resto de fuerzas podemos usar que:

$$\int_0^{y_{max}} F\vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_{max}} KDay(-\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) = -KDa \int_0^{y_{max}} ydy = -KDa\frac{y_{max}^2}{2}$$

$$\int_0^{y_{max}} F_g \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_{max}} mgydy = \frac{mgy_{max}^2}{2}$$

$$\int_0^{y_{max}} \vec{F_e} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_{max}} KD(cos(\alpha)(-\hat{x}) + sen(\alpha)(-\hat{y})) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y})$$

Notar que a pesar de ser no nulo el integrando de x, su desplazamiento es nulo denuevo!, por lo que no ejerce trabajo. Finalmente,

$$\int_0^{y_{max}} \vec{F_e} \cdot d\vec{r} = -KD\frac{y_{max}2}{2}$$