Resumen mecánica

Autor: José Muñoz T.

1 Dinámica

La dinámica es el área de la física que se centra en el estudio de fuerzas, y como estas actúan sobre objetos masivos. Mezcla el área de la cinemática, y las leyes de Newton. Estas ultimas, introducen el concepto de masa, la cual puede ser pensada como la resistencia al cambio de movimiento, y la fuerza, que es la cantidad de movimiento en una cantidad de tiempo que se transmite al objeto.

Para la totalidad de este documento usaremos cilíndricas como ejemplo, pero las siguientes reglas aplican a todo conjunto de coordenadas ordenadas ortonormales. La aceleración y la velocidad en cilíndricas puede ser expresado como:

$$\boldsymbol{a} = a_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + a_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_z\,\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{v} = v_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

El vector $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$ es distinto de $(\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\theta})$ debido a que el vector ordenado depende de la posición de cada componente. Es decir:

$$(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}) \neq (\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\theta})$$

Las aceleraciones de $\vec{a}$ están dadas por

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2; a_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}; a_z = \ddot{z}$$

La segunda ley de Newton, nos dice que $ma = \Sigma\mathbf{F}$, lo cual significa que si existe una fuerza neta, implica una aceleración **no nula**. Podemos dividir la fuerza neta en sus componentes, lo cual implica que:

$$a_\rho = F_\rho/m; a_\theta = F_\theta/m; a_z = F_z/m$$

igualadas a las ecuaciones de cinemática nos entregan 3 ecuaciones de movimiento, una para cada coordenada. Hay casos específicos que son comúnmente trabajados en mecánica:

- Movimiento circular $\rightarrow \ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$
- Conservación del momento angular $\rightarrow F_\theta = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \rightarrow \rho^2\dot{\theta} = cte$. Luego, si ocurre que es un movimiento circular entonces ρ es cte, y $\rho\dot{\theta} = v_\theta$ es una constante por la totalidad del movimiento, del contrario, a menor radio, mayor es la rapidez angular $\dot{\theta}$!, y viceversa.
- Movimiento Cónico (con coordenadas esféricas) $\rightarrow \theta = cte \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

  Es de gran importancia ver que aunque $\ddot{\rho} = 0$ en el movimiento circular, aún existe una componente de la aceleración radial! $a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2$ que actúa para el constante cambio de la dirección del vector $\hat{\rho}$!.

1.1 el Mecatruco es clave

El Mecatruco consiste en cambios de variable en las ecuaciones de movimiento, para imponer condiciones iniciales y finales de cantidades conocidas. El truco consiste en

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}(x(t)))$$

una derivada por cadena que nos entrega

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$$

Usado en una ecuación de movimiento usual tipo $m\ddot{x} = F_x(x)$ nos entregaría

$$\dot{x}d\dot{x} = \frac{F_x}{m}dx$$

Al momento de integrar debemos hacer valido el cambio de variable, esto significa que si integramos entre dos tiempo (t_o, t_f) entonces los límites de integración quedan expresados como $(\dot{x}(t_o), \dot{x}(t_f))$ para el diferencial de velocidad, y $(x(t_o), x(t_f))$ para el diferencial de posición. La integral nos quedaría como:

$$\int_{\dot{x}(t_o)}^{\dot{x}(t_f)} \dot{x}d\dot{x} = \int_{x(t_o)}^{x(t_f)} \frac{F_x}{m}dx$$

Con almenos 3 de estos 4 límites conocidos, podemos despejar la variable de interés y resolver nuestro problema de dinámica!.

2 Producto Vectorial

El producto Vectorial, o producto cruz, puede ser pensado como que tan ortogonal es un vector con respecto a otro, siendo su máximo si A $\perp$ B, y mínimo(nulo) en A//B.

Para las coordenadas ordenadas, podemos ayudarnos en que el producto vectorial entre dos coordenadas seguidas, da la 3ra, luego, si extendemos el vector unitario podemos visualizarlo mejor.

$$(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}, \hat{\rho}, \hat{\theta})$$

Luego, si hacemos el mismo ejercicio, pero en el orden inverso, debemos agragar un menos debido a que los resultados son vectores!, no escalares, esto nos dará el resto de productos.

Las identidades quedarán como:

Operación	$\hat{\rho}$	$\hat{\theta}$	$\hat{z}$
$\times$	$(\hat{\rho}) \times (\hat{\rho}) = \mathbf{0}$ $(\hat{\theta}) \times (\hat{\rho}) = -\hat{z}$ $(\hat{z}) \times (\hat{\rho}) = \hat{\theta}$	$(\hat{\rho}) \times (\hat{\theta}) = \hat{z}$ $(\hat{\theta}) \times (\hat{\theta}) = \mathbf{0}$ $(\hat{z}) \times (\hat{\theta}) = -\hat{\rho}$	$(\hat{\rho}) \times (\hat{z}) = -\hat{\theta}$ $(\hat{\theta}) \times (\hat{z}) = \hat{\rho}$ $(\hat{z}) \times (\hat{z}) = \mathbf{0}$

Bajo estas identidades podemos escribir el producto vectorial entre dos vectores, sean estos la aceleración y la velocidad:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} a_\rho & a_\theta & a_z \\ v_\rho & v_\theta & v_z \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{z}} \end{vmatrix}$$

Para casos particulares(como por ejemplo el problema 1 del auxiliar 12) podremos imponer que $a_z = v_z = 0$, quedandonos el producto vectorial nada más que

$$(a_\rho v_\theta - a_\theta v_\rho)\hat{z}$$

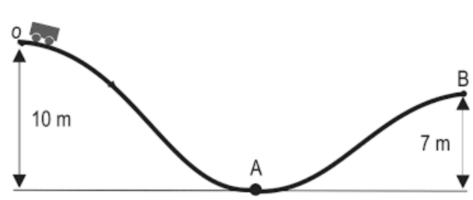
lo cual puede hacer nuestros cálculos mucho más sencillos al momento de calcular cantidades provenientes de coordenadas intrínsecas.

3 Energías y Resortes

La Energía Mecánica de un sistema puede ser pensado como la capacidad para generar un cambio dentro de este, una pelota en la cima de una colina puede caer, tomar una gran cantidad de impulso e incluso mover un auto solo con su velocidad, pero una pelota en un pozo sin movimiento alguno es un objeto sin posibilidad a realizar cambios en el sistema. Podemos separar la Energía en dos componentes, la Cinética, que nos dice la energía que lleva un cuerpo, y la Potencial que nos dice la energía que posee este cuerpo con respecto al sistema alrededor suyo, usualmente la potencial se escribe en función de la posición y la cinética en función de la velocidad tal que

$$E(x, \dot{x}, t) = K(\dot{x}, t) + U(x, t)$$

Si el sistema se encuentra solo bajo la acción de fuerzas conservativas entonces la energía se conserva, y $E(t) = E_0$, esto nos entrega una gran herramienta al momento de encontrar cantidades tales como velocidad final, o distancia máxima. Un clásico ejemplo es el de una montaña rusa



En donde en **O** la energía es puramente potencia, en **A** es puramente cinetica, y en **B** es una mezcla de ambos, esto se refleja en las siguientes ecuaciones bajo $\Delta E = 0$

$$U(O) = K(A) = K(B) + U(B)$$

alternativamente, el carro con una masa m,

$$mgz_o = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$$

Energías potenciales de utilidad son la gravitatoria y del resorte

$$U_g = mgz; U_r = \frac{1}{2}k(\delta x)^2$$

respectivamente, en donde δx es el desplazamiento del resorte, y **z** es la altura desde nuestro sistema de referencia, recordemos que existen muchos potenciales dependiendo de nuestro sistema de referencia!, pero la conservación de la energía no cambia.

Los resortes son objetos que constantemente transforman energías potenciales a cinética y viceversa, poseen una constante de elasticidad **K** que es la constante de proporcionalidad entre el estiramiento del resorte, y la fuerza que este ejerce. También poseen un largo natural, y cuando se encuentran en el, la fuerza del resorte es nula. Su fuerza por lo tanto es:

$$F_r = -k(x - lo) = -k\delta x$$

Puntos importantes son que en l_o el resorte no ejerce una fuerza, que la fuerza ejercida es contraria al desplazamiento, si el resorte se encuentra estirado se tiende a contraer, y si está contraido se estira. Por su naturaleza, la fuerza ejercida por el resorte es una fuerza central. Cuando la energía se conserva, y el resorte se encuentra en movimiento, comunmente llegaremos a oscilaciones y eventualmente a un MAS.

En el caso de que la energía cambie!, implica la existencia de una fuerza no conservativa que está ejerciendo trabajo!, nuestras ecuaciones solo se modifican por la cantidad

$$\Delta E = W.$$

4 Producto punto como trabajo

El trabajo infinitesimal aplicado por la fuerza $\vec{F}$ al desplazar un cuerpo en una cantidad $d\vec{r}$ se define como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo total realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de una trayectoria es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En coordenadas cilíndricas, con:

$$\vec{F} = F_\rho \, \hat{\rho} + F_\theta \, \hat{\theta} + F_z \, \hat{z}, \quad d\vec{r} = d\rho \, \hat{\rho} + \rho \, d\theta \, \hat{\theta} + dz \, \hat{z}$$

La integral se convierte en:

$$W = \int_C (F_\rho \, d\rho + F_\theta \, \rho \, d\theta + F_z \, dz)$$

Para fuerzas centrales, tales como la gravedad o los resortes solo sobrevive la F_ρ. Para otros ejemplos, tales como la Ruleta de los casinos, F_θ es aquella que produce trabajo y termina deteniendo a la bola, ya que el desplazamiento de ella se realiza en θ!.

5 Pequeñas Oscilaciones

La aproximación de pequeñas oscilaciones se basa en oscilar alrededor de un punto de equilibrio por un cantidad pequeña $\epsilon << 1$. Si el punto de equilibrio de nuestra ecuación es z_{eq}, entonces podemos hacer el cambio de variable

$$z(t) = z_{eq} + \epsilon(t) \rightarrow \ddot{z} = \ddot{\epsilon}$$

Bajo una expansión de Taylor, La fuerza en función de Z queda como:

$$f(z_{eq} + \epsilon) = f(z_{eq}) + f'(z_{eq})\epsilon + \frac{f''(z_{eq})}{2}\epsilon^2 + ...$$

La clave del movimiento en pequeñas oscilaciones es que el término $f(z_{eq})$ es nulo!, debido al equilibrio, y $\frac{f''(z_{eq})}{2}\epsilon^2$ es despreciable debido a $\epsilon >> \epsilon^2$.

Nuestra ecuación de movimiento entonces quedará como

$$m\ddot{\epsilon} = f'(z_{eq})\epsilon \rightarrow \ddot{\epsilon} = \frac{f'(z_{eq})}{m}\epsilon$$

Comunmente $f'(z_{eq}) < 0$ por lo que podemos nombrar a la constante $\omega_o = \sqrt{\frac{-f'(z_{eq})}{m}}$ como rapidez angular. A partir de ella podemos obtener diferentes valores de imporancia en la oscilación, tal como la frecuencia$f_o = 2\pi\omega_o$, y el periodo $T_o = \frac{1}{f_o}$ respectivamente.

Existen otras formas equivalente de llegar a pequeñas oscilaciones, como $sen(\theta) = \theta$ u otras, estas están basadas en la expansión de Taylor anterior, por lo cual deberían entregar resultados similares.

Una vez en este punto, podemos usar multiples Ansatz oscilatorios para ϵ, los cuales entregan

$$\epsilon(t) = Acos(\omega_o t + \phi) = Bsen(w_o t) + Ccos(\omega_o t)$$

En el primer caso, A es la amplitud máxima de oscilación, y ϕ es la fase(notar que si phi es pi/2, entonces la función cos pasa a ser sen), mientras que para el segundo $\sqrt{B^2 + C^2}$ es la amplitud. Para encontrar el valor de las constantes A, y ϕ, o alternativamente B y C, se deben ocupar las condiciones iniciales de oscilación, por ejemplo en $t = 0$ se tiene

$$\epsilon(t = 0) = Acos(\phi) = C;$$
$$\dot{\epsilon}(t = 0) = -A\omega_o sen(\phi) = B\omega_0$$

Una vez resuelto para ϵ, basta reemplazar en nuestra ecuación inicial para obtener el movimiento resultante!

$$z(t) = z_{eq} + \epsilon = z_{eq} + Acos(\omega_o t + \phi)$$