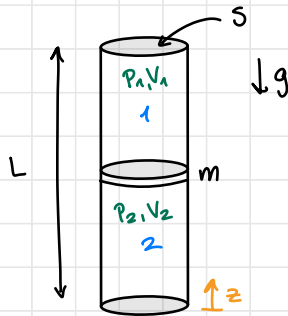


Pauta Aux 16

P1)



a) Por propiedad de los gases $PV = cte$
 en cada parte del tubo, ie, $P_1 V_1 = cte$
 $P_2 V_2 = cte$

Pero nos dicen que en $t=0$ $P_1 = P_2 = P_0$

$$y \quad P_0 S = \frac{3}{4} mg$$

luego, usando $V_1 = S(L-z)$ $\wedge$ $V_2 = Sz$

$$P_1 V_1 = P_0 S \frac{L}{2} = \frac{3}{8} mgL \Rightarrow F_1 = P_1 S = \frac{3mgL}{8(L-z)}$$

porque la presión es $\frac{F_{2a}}{\text{Área}}$

$$P_2 V_2 = P_0 S \frac{L}{2} = \frac{3}{8} mgL \Rightarrow F_2 = P_2 S = \frac{3mgL}{8z}$$

Así, DCL

$$\Rightarrow m\ddot{z} = \frac{3mgL}{8z} - \frac{3mgL}{8(L-z)} - mg$$

meca bruto

$$\dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} = g \left(\frac{3L}{8z} - \frac{3L}{8(L-z)} - 1 \right) \quad \bigg| \int_{L/2}^{z_{min}} dz$$

velocidad en el máximo

velocidad inicial

$$0 = \frac{3L}{8} \left(\ln z_{min} - \ln \frac{L}{2} + \ln(L - z_{min}) - \ln \left(L - \frac{L}{2} \right) \right) - \left(z_{min} - \frac{L}{2} \right)$$

0

$$\frac{8}{3L} \left(z_{min} - \frac{L}{2} \right) = \ln \left[\frac{4(L - z_{min})z_{min}}{L^2} \right]$$

Una ec. para encontrar z_{min}

b) Teníamos $\Sigma F = \frac{3mgL}{8z} - \frac{3mgL}{8(L-z)} - mg$ y en el equilibrio z^* esto es cero

$$\Rightarrow \cancel{mg} \left(\frac{3L}{8z^*} - \frac{3L}{8(L-z^*)} - 1 \right) = 0 \quad / \cdot 8(L-z^*)z^*$$

$$8z^{*2} + \underbrace{(-3L - 3L - 8L)}_{-14L} z^* + 3L^2 = 0$$

$$z^* = \frac{14L \pm \sqrt{(14)^2 L^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3L^2}}{16}$$

$$= \frac{14L \pm 10L}{16} \quad \begin{aligned} & \downarrow \\ & L \sqrt{4 \cdot 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3} \\ & = 2L \sqrt{49 - 24} \\ & = 2L \sqrt{25} = 10L \end{aligned}$$

Pero $z^* \in [0, L]$ así que
nos quedamos con el (-)

$$\Rightarrow z^* = \frac{4}{16} L = \frac{L}{4}$$

Para encontrar el período de pequeñas oscilaciones notar

sea $\sum F = f(z)$ la suma de las fzas sea una función de z arbitraria.

Cambiémos el sistema de referencia, pongámonos en el equilibrio
y nos movemos un poquito, esto es

$$z(t) = \underbrace{z^*}_{\text{mi posición}} + \underbrace{\epsilon(t)}_{\text{el equilibrio}}, \quad \epsilon \ll 1$$

me muevo un poquito

Como ϵ es chiquito, podemos hacer un Taylor a las fzas

$$f(z^* + \epsilon) = \underbrace{f(z^*)}_{=0} + f'(z^*)\epsilon + \frac{1}{2!} f''(z^*)\epsilon^2 + \dots$$

Pero $f(z^*) = 0$ porque z^* es un equilibrio y este término es muy chico (despreciable), así

$$f(z^* + \epsilon) \approx f'(z^*)\epsilon$$

y notando que

$$\ddot{z} = \frac{d^2}{dt^2} (z^* + \epsilon) = \ddot{\epsilon} \quad \text{nos queda la sgte ec. de mov.}$$

$$m\ddot{\epsilon} = f'(z^*)\epsilon$$

comparando con la ec. del osc. armónico

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = -\frac{f'(z^*)}{m}$$

y el período es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

En nuestro caso $f(z) = \frac{3mgL}{8z} - \frac{3mgL}{8(L-z)} - mg$

$$\Rightarrow f'(z) = -\frac{3mgL}{8z^2} - \frac{3mgL}{8(L-z)^2}$$

y evaluando en $z^* = L/4$

$$f'(z^*) = -\frac{3mgL}{8} \left(\frac{16}{L^2} + \frac{1}{\left(\frac{3}{4}L\right)^2} \right)$$

$$= -\frac{3mg}{8L} \left(16 + \frac{16}{9} \right) \quad \frac{16}{9} (9+1)$$

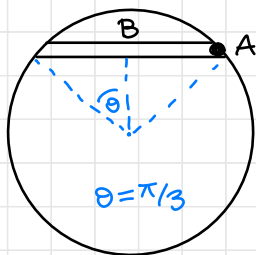
$$= -\frac{20}{3} \frac{mg}{L}$$

y así,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20g}{3L}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3L}{20g}}$$

P2



$$\vec{F} = -mg \frac{r}{R_T} \hat{r}$$

CI: en el Pto A. $v=0$

a) calcular $v_{\max}$ en B usando energía

Encontremos la energía potencial gravitatoria, usaremos

$$V(r=a) - V(r=b) = -W_{b \rightarrow a}$$

$$= - \int_b^a -mg \frac{r}{R_T} \hat{r} \cdot \vec{r} dr$$

$$= \frac{mg}{R_T} \left. \frac{r^2}{2} \right|_b^a$$

$$V(a) - V(b) = \frac{mg}{R_T} \frac{a^2}{2} - \frac{mg}{R_T} \frac{b^2}{2} \Rightarrow V(r) = \frac{mg}{2R_T} r^2$$

luego $E_A = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{mg}{2R_T} R_T^2$

En B se tiene
 $r_B = R_T \cos \theta$

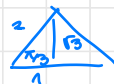
$$E_B = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \frac{mg}{2R_T} R_T^2 \cos^2 \theta$$

Iguando energías

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{mg}{2} R_T (1 - \cos^2 \theta)$$

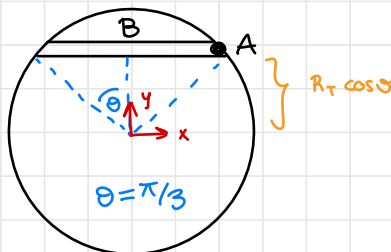
$$\sin^2 \theta = \sin^2 \pi/3 = \frac{3}{4}$$

$$v_{\max}^2 = \frac{3}{4} g R_T //$$



b) Voy a usar cartesianas

Así el movimiento es
 sólo en x



notando que $\vec{r} = (x, y) = (x, R_T \cos \theta)$ en este caso podemos escribir $\vec{F}$ como

$$\vec{F} = -mg \frac{1}{R_T} (x, R_T \cos \theta)$$

luego

$$\cancel{m} \ddot{x} = - \frac{\cancel{m}g}{R_T} x \quad / \quad \int_0^0 dx \quad \leftarrow B$$

$$\int_0^{v_{\max}} \dot{x} dx = - \frac{g}{R_T} \int_{R_T \sin \theta}^0 x dx \quad \leftarrow A$$

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = \frac{g}{R_T} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{R_T \sin \theta}$$

$$v_{\max}^2 = g R_T \underbrace{\sin^2 \theta}_{3/4} \quad \text{con } \theta = \pi/3$$

El periodo de pequeñas oscilaciones alrededor de B lo podemos calcular, al igual que en la P1, como

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{m} F_x'(x=0) \quad \text{en B, que es un equilibrio} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= -\frac{1}{m} \left(-\frac{mg}{R_T} \right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} //$$