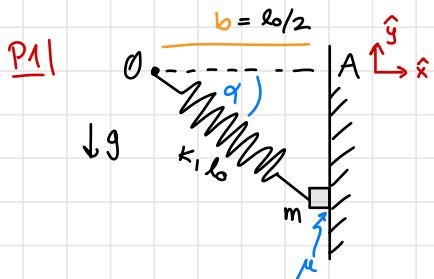
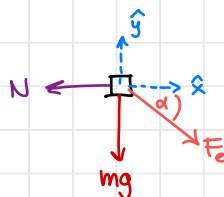


Pauta Aux 14



a) Por ahora no hay roce, así que escribamos las ecuaciones de movimiento y busquemos cuándo $N=0$

DCL



largo del resorte l
largo natural l_0

$$|F_e| = k(l - l_0)$$

$$= k|\sqrt{y^2 + b^2} - l_0|$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + b^2}}$$

Wego

2ª Ley de Newton

$$\sum F_x = -N + F_e \cos \alpha$$

$$m\ddot{x} = -N + k|\sqrt{y^2 + b^2} - l_0| \frac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}}$$

$= 0$

porque no hay movimiento en $\hat{x}$

$$\Rightarrow N = \frac{kb}{\sqrt{y^2 + b^2}} |\sqrt{y^2 + b^2} - l_0| \quad (*)$$

y esto es cero cuando $\sqrt{y^2 + b^2} = l_0$

tiene sentido pues lo que mantiene a la masa contra la pared es el resorte y va a dejar de haber fza cuando el resorte llegue a su largo natural.

$$\Rightarrow y^* = -\sqrt{l_0^2 - b^2} = -\sqrt{l_0^2 - \frac{1}{4}l_0^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{4}} l_0$$

y por conservación de energía

lo que queremos encontrar

$$E_{y=y^*} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy^* + \frac{1}{2}k(\sqrt{y^{*2} + b^2} - l_0)^2$$

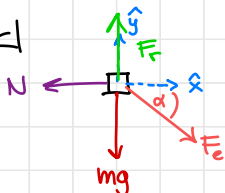
ya vimos que es cero esto

Wego por cons. de Energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy^* = \frac{1}{2}kl_0^2 \Rightarrow v^2 = \frac{kl_0^2}{4m} + \sqrt{3}gl_0$$

b) Calulemos el roce estático primero

DCL



2ª Ley de Newton

$$\sum F_y = F_r - mg - F_e \sin \alpha$$

$$m\ddot{y} = F_r - mg - F_e \sin \alpha$$

$= 0$ porque está estático y en $y=0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$

$$0 = F_r - mg \Rightarrow F_r = mg$$

y sabemos que $|F_r| \leq \mu N$, así que a calcular N :

$$\rightarrow K |\sqrt{y^2 + b^2} - l_0| = K \left| \frac{1}{2} l_0 - l_0 \right| = \frac{K l_0}{2}$$

2ª Ley Newton $\left(\begin{array}{l} \text{en} \\ y=0 \end{array} \right)$

$$\sum F_x \Big|_{y=0} = -N + F_e \cos \alpha = 1$$

$$m \ddot{x} = 0 = -N + \frac{K l_0}{2} \Rightarrow N = \frac{K l_0}{2}$$

y ahora sí $|F_r| \leq \mu_e N \Rightarrow mg \leq \mu_e \frac{K l_0}{2}$

$$\frac{2mg}{K l_0} \leq \mu_e$$

c) Ahora que hay roce, el y^* en el que despegamos no cambia con respecto al de (a) porque usamos la ecuación en $\hat{x}$ y como el roce actúa en $\hat{y}$ no importa para la normal, ahora para calcular la velocidad usaremos

$$E_y = y^* - E_{\text{inicial}} = W_{\text{roce}}$$

donde W_{roce} se calcula para el trayecto de $y=0$ a $y=y^*$

$$F_{\text{roce}} = \mu N = \mu \frac{K b}{\sqrt{y^2 + b^2}} \quad \left(\begin{array}{l} (*) \\ \text{pero en todo el recorrido, el largo del resorte } (\sqrt{y^2 + b^2}) \text{ es menor al largo natural } (l_0) \end{array} \right)$$

$$= \frac{\mu K b l_0}{\sqrt{y^2 + b^2}} - \mu K b$$

Así

$$W_{\text{roce}} = \int_0^{y^*} \left(\frac{\mu K b l_0}{\sqrt{y^2 + b^2}} - \mu K b \right) \hat{y} \cdot \hat{y} dy \quad \left(\begin{array}{l} = 1 \end{array} \right)$$

$$= \mu K b \left(l_0 \int_0^{y^*} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + b^2}} - y^* \right)$$

$\underbrace{\int_0^{y^*} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + b^2}}}_{\text{arcsinh}\left(\frac{y}{b}\right) \Big|_0^{y^*}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dy}{b \sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}} \\ \int \frac{\cosh u \, du}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}} \\ \cosh u \\ = u = \text{arcsinh } y/b \end{array} \right.$

$y/b = \sinh u$
 $dy = b \cosh u \, du$

 Propiedad de fns. hiperbólicas
 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$= \mu K b (l_0 \text{arcsinh}(y^*/b) - y^*)$$

$$= \mu k b l_0 \left(\operatorname{arcsinh} \left(-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \mu k b l_0 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsinh}(\sqrt{3})}_{-0.7396...} \right)$$

Así usando $\Delta E = W_{roce}$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g \underbrace{y^*}_{\frac{\sqrt{3}}{2} l_0} - \frac{1}{8} k l_0^2 = \mu k b \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{3} \right)$$

$$v^2 = \frac{2 \mu k b}{m} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sinh^{-1} \sqrt{3} \right) - \sqrt{3} g l_0 + \frac{m k l_0^2}{4}$$