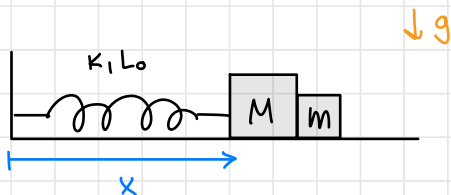


Pauta Aux 10

P1



a) Nos dicen que en el instante inicial el resorte está comprimido una distancia δ_0

$$\Rightarrow x(t=0) = L_0 - \delta_0$$

DCL de M

normal
con la
masa m



$$\Rightarrow M \ddot{x} = -K(x - L_0) - N \quad (i)$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} = -\frac{K}{M}(x - L_0) - \frac{N}{M}$$

DCL de m



$$\Rightarrow m \ddot{x} = N \quad (ii)$$

$$-m \frac{K}{M}(x - L_0) - \frac{m}{M} N = N \quad / \quad M$$

$$-mK(x - L_0) = N(m + M)$$

Se despegan cuando $N = 0$

$$\Rightarrow x_{\text{despegue}} = L_0$$

Lo que es lógico, pues cuando para L_0 el resorte empieza a retener M , pero no a m que sigue de largo con la misma velocidad

b) La velocidad de m será la velocidad con la que llegó a $x_{\text{despegue}} = L_0$, esto es $\dot{x}(x_{\text{despegue}})$. Para encontrar $\dot{x}$ en función de x , hacemos $(i) + (ii)$ para eliminar N

$$(m + M) \ddot{x} = -K(x - L_0) \quad / \quad \int_{L_0 - \delta_0}^{L_0} dx$$

$$(m + M) \int_0^{\dot{x}_d} \dot{x} d\dot{x} = -K \int_{L_0 - \delta_0}^{L_0} (x - L_0) dx$$

$$(m + M) \frac{\dot{x}_d^2}{2} = -K \left[\frac{L_0^2}{2} - \frac{(L_0 - \delta_0)^2}{2} - L_0(L_0 - (L_0 - \delta_0)) \right]$$

$$\dot{x}_d^2 = \frac{-2K}{m + M} \left[L_0 \delta_0 - \frac{\delta_0^2}{2} - L_0 \delta_0 \right]$$

$$= K \delta_0^2 / (m + M)$$

c) Ahora sólo nos interesa la masa M , que sólo siente la fza del resorte

$$M\ddot{x} = -K(x - L_0) \quad \text{y ahora el instante inicial es el momento que se despegan}$$

$$\Rightarrow x(t=0) = L_0$$
$$\dot{x}(t=0) = \sqrt{\frac{K\delta_0^2}{m+M}}$$

Es decir, tenemos todo para resolver la esto

Hagamos un cambio de variable para identificar el M.A.S

$$u = x - L_0 \quad , \quad \text{así} \quad M\ddot{u} = -Ku \quad \text{ó}$$

$$\ddot{u} = \underbrace{\frac{K}{M}}_{\omega_0^2} u \quad , \quad \text{con} \quad u(t=0) = 0$$
$$\dot{u}(t=0) = \sqrt{\frac{K\delta_0^2}{m+M}}$$

La solución del oscilador armónico es

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Ahora aplicamos las cond. iniciales

A no puede ser cero si lo fuera, no habría movimiento

$$u(t=0) = 0 = A \cos \phi \implies \cos \phi = 0 \implies \phi = \pi/2$$

$$\text{así} \quad u(t) = A \cos(\omega_0 t + \pi/2) = A \sin(\omega_0 t)$$

$$\implies \dot{u}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{u}(t=0) = \sqrt{\frac{K\delta_0^2}{m+M}} = A\omega_0$$

$$\implies A = \sqrt{\frac{K\delta_0^2}{m+M}} \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{K\delta_0^2}{m+M}} \sqrt{\frac{M}{K}}$$
$$= \sqrt{\frac{M\delta_0^2}{m+M}}$$

Así

$$u(t) = \delta_0 \sqrt{\frac{M}{m+M}} \sin(\omega_0 t)$$

$$\implies x(t) = L_0 + \delta_0 \sqrt{\frac{M}{m+M}} \sin(\omega_0 t)$$

El máximo x es cuando el $\sin()$ vale lo máximo, que es 1, así que

$$x_{\max} = L_0 + \delta_0 \sqrt{\frac{M}{m+M}}$$

y ¿ cuánto se demora en pasar por la misma posición?

▷ Podemos decir que ir y volver es media oscilación, por lo que se demora $\frac{T}{2}$, con T el período $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\text{así } t^* = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

▷ Otra forma es decir, para que $x = L_0$, $\sin(\omega_0 t^*) \stackrel{!}{=} 0$ por lo tanto,

$$\omega_0 t^* = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$n=0$ no nos sirve pues es el instante inicial

$n=1$ es cuando vuelve,

$$\text{así que } t^* = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} //$$