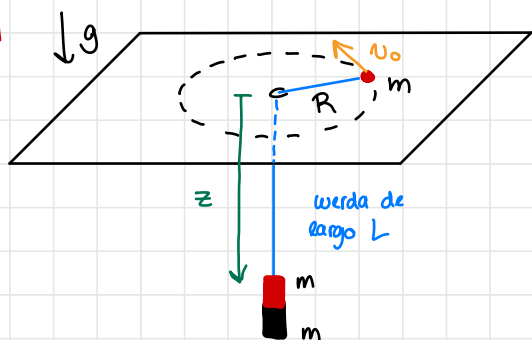
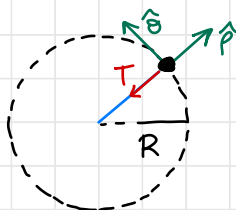


# Pauta Aux 6

P11



a) Antes que se desprege la masa inferior, la que está sobre la plataforma se mueve con velocidad cte  $v_0$  en una trayectoria circular de radio  $R$ . Usemos coords. polares



La única fuerza es la tensión  $\vec{F} = -T\hat{r}$   
 $\Rightarrow F_r = -T$   
 $F_\theta = 0$

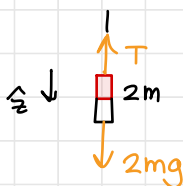
wego  $ma_r = F_r$   
 $ma_\theta = F_\theta$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$$

Pero  $r = R$   
 $\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$+mR\dot{\theta}^2 = +T$$

y las 2 masas que welgan



$\hat{z}$

$$2m\ddot{z} = -T + 2mg$$

Pero para que se la otra masa se mueva en un círculo esta no puede subir ni bajar

$$\Rightarrow z = \text{cte}, \quad \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -T + 2mg$$

$$T = 2mg$$

Por lo tanto,  $mR\dot{\theta}^2 = 2mg$   $\bigg/ \cdot \frac{R}{m}$   
 $(R\dot{\theta})^2 = 2gR$

y para un movimiento circular, la velocidad es  $v = R\dot{\theta}$

$\Rightarrow$

$$v_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR}$$

digamos que sucede en  $t=0$

b) y c)

Cuando se desprege la masa inferior ya no sabemos qué pasa, puede bajar, subir, así que tenemos que escribir las ecuaciones de movimiento

masa sobre la plataforma  $\hat{r} \mid m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$

$\hat{\theta} \mid m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$

$r(t=0) = R$  porque estaba haciendo el círculo y no tenía velocidad en

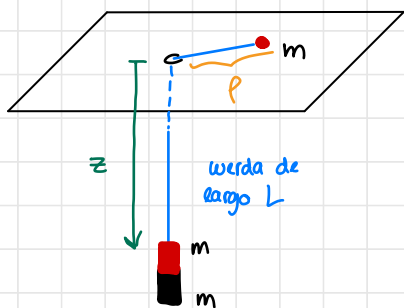
$r \Rightarrow \dot{r}(t=0) = 0$

Para las condiciones iniciales de  $\theta$ , podemos asumir que  $\theta(t=0) = 0$  y

recordar  $r\dot{\theta} \mid_{t=0} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{r(t=0)} = \frac{\sqrt{2gR}}{R} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$

masa colgante  $\hat{z} \mid m\ddot{z} = mg - T$

Notar que



como la cuerda tiene largo  $L$ ,

$$L = r + z$$

$$\Rightarrow z(t) = L - r(t)$$

así

$$z(t=0) = L - R$$

$$\dot{z}(t=0) = 0$$

y  $\ddot{z} = -\ddot{r}$

así la ecuación en  $\hat{z}$  es

$$-m\ddot{r} = T - mg$$

Por lo tanto, tenemos 3 ecuaciones

(i)  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$

(ii)  $m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$

(iii)  $-m\ddot{r} = mg - T$

d) La más simple parece la (ii), ya que no tiene la tensión (que no sabemos cuánto vale) así que intentemos resolverlo. Hay 2 formas de hacerlo

1) notar que  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad / \cdot r$   
 $r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt} (p^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow p^2 \dot{\theta} = p(t=0)^2 \dot{\theta}(t=0) \\ = R^2 \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

Por lo tanto

$$\dot{\theta} = \sqrt{2g} \frac{R^{3/2}}{p^2}$$

2) Tenemos  $p\ddot{\theta} + 2\dot{p}\dot{\theta} = 0$

$$p\ddot{\theta} = -2\dot{p}\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \quad \bigg| \int_{t=0}^t dt'$$

$$\int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2 \int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{2g/R}} = -2 \ln \frac{p}{R} \\ = \ln \frac{R^2}{p^2}$$

así, nuevamente

$$\dot{\theta} = \sqrt{2g} \frac{R^{3/2}}{p^2}$$

Ahora usamos las otras 2 ecuaciones, hagamos (i)-(iii) para cancelar el T (que aún desconocemos)

(i)  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$

(iii)  $-m\ddot{r} = mg - T$

$$2\cancel{m}\ddot{r} - \cancel{m}r\dot{\theta}^2 = -\cancel{m}g$$

$$2\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g$$

usando  $\dot{\theta}^2 = 2gR^3/p^4$

$$2\ddot{r} - r \cdot 2gR^3/p^4 = -g$$

$$\ddot{r} = \frac{g}{2} (2R^3/p^3 - 1) \quad *$$

Así, usamos esta ecuación en (iii) para encontrar T en función de r,

$$\rightarrow -m \frac{g}{2} (2R^3/p^3 - 1) = mg - T \quad *$$

▷ antes de que se soltara el bloque,  $T_{\text{antes}} = 2mg$

▷ El después lo podemos calcular con  $*$  evaluándolo en  $t=0$ , es decir,

$$-\frac{mg}{2} (2 \frac{R^3}{R^3} - 1) = mg - T \Rightarrow T_{\text{después}} = mg \left( 1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \Delta T = \left( \frac{3}{2} - 2 \right) mg \\ = -\frac{mg}{2} \quad \text{Disminuye!}$$

c) Ahora, calculemos el alejamiento máximo usando (\*)

mecanotruco

$$\ddot{\rho} = \frac{g}{2} \left( \frac{2R^3}{\rho^3} - 1 \right)$$

$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} \dot{\rho}$

$$\dot{\rho} \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} = \frac{g}{2} \left( \frac{2R^3}{\rho^3} - 1 \right)$$

$\rho^*$  será el  $\rho$  máximo si este es el máximo  $\rho$ , en ese punto se debe cumplir que  $\dot{\rho} = 0$

porque  $\dot{\rho} = 0$  cuando  $\rho = \rho^*$

$$\int_R^{\rho^*} \dot{\rho} \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} d\rho = \frac{g}{2} \int_R^{\rho^*} \left( \frac{2R^3}{\rho^3} - 1 \right) d\rho$$

$$\int_R^{\rho^*} \dot{\rho} d\dot{\rho} = \frac{g}{2} \left[ \cancel{2R^3} \left( \frac{-1}{\cancel{2}\rho^2} \right) \Big|_R^{\rho^*} - \rho \Big|_R^{\rho^*} \right]$$

$$\left. \frac{\dot{\rho}^2}{2} \right|_R^{\rho^*} = \frac{g}{2} \left[ R^3 \left( -\frac{1}{\rho^{*2}} + \frac{1}{R^2} \right) - \rho^* + R \right]$$

$$0 = \frac{g}{2} \left[ R^3 \frac{\rho^{*2} - R^2}{\rho^{*2} R^2} - (\rho^* - R) \right]$$

$$0 = \frac{R}{\rho^{*2}} (\rho^* + R) (\rho^* - R) - (\rho^* - R) \quad / \cdot \rho^{*2}$$

$$0 = R \rho^* + R^2 - \rho^{*2}$$

Solución :

$$\rho^* = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{-2}$$

$$= \frac{1}{2} (R \pm \sqrt{5} R)$$

$$= \frac{R}{2} (1 \pm \sqrt{5})$$

,  $\rho$  no puede ser negativo y como  $\sqrt{5} > 1$ , nos quedamos con el (+)

el máximo  $\rho$  es

$$\rho^* = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{5})$$

y para obtener la rapidez en este punto, notamos que

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}$$

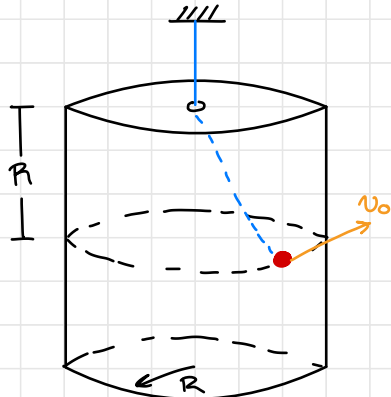
va a ser cero en  $\rho^*$   $\Rightarrow v^* = \rho^* \dot{\theta}^*$

y recordamos que

$$\dot{\theta} = \sqrt{2g} \frac{R^{3/2}}{\rho^2}$$

$$\therefore v^* = \sqrt{2g} \frac{R^{3/2}}{\rho^*} = \frac{2\sqrt{2gR}}{1 + \sqrt{5}}$$

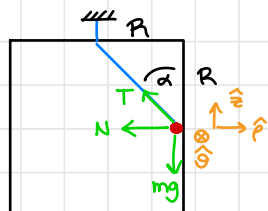
P21



a) Para que la partícula mantenga el contacto, la normal debe ser mayor a cero siempre.

Para saber cuánto vale la normal conviene escribir las ecuaciones de movimiento. Usamos coordenadas cilíndricas.

▷ vista lateral:



Tenemos 3 fuerzas, la tensión de la cuerda, la normal con la pared y el peso (ninguna va en  $\hat{\theta}$ )

Escribamos las ecuaciones de movimiento

$$\hat{r} \mid m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N - T \sin \alpha$$

$$\hat{\theta} \mid m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$\hat{z} \mid m\ddot{z} = T \cos \alpha - mg$$

Pero la partícula se mueve en un círculo de radio  $R$  con rapidez  $v_0$  constante.

$$\Rightarrow r = R \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$R\dot{\theta} = v_0 \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

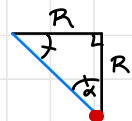
$$z = R \rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

Así, queda

$$\hat{r} \mid -mv_0^2/R = -N - T \sin \alpha$$

$$\hat{z} \mid 0 = T \cos \alpha - mg$$

¿y cuánto vale  $\alpha$ ?



es un triángulo isósceles,  $\therefore \alpha = \pi/4$

Así nos quedan 2 ecs

$$\frac{mv_0^2}{R} = N + T/\sqrt{2}$$

$$0 = T/\sqrt{2} - mg \Rightarrow T = \sqrt{2} mg$$

$$\frac{mv_0^2}{R} = N + mg \Rightarrow N = m\left(\frac{v_0^2}{R} - g\right)$$

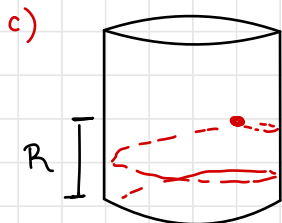
Para que  $N > 0$ ,  $\frac{v_0^2}{R} > g \Rightarrow v_0 > \sqrt{gR}$

b) Primero, ya vimos que  $T = \sqrt{2} mg$ , así que eso no cambia.

Si  $v_0 = 2 v_{\min} = 2\sqrt{gR}$ , tendríamos

$$N = m \left( \frac{v_0^2}{R} - g \right) \\ = m \left( \frac{4gR}{R} - g \right)$$

$$N = 3mg //$$



La masa va a empezar a caer, pero mantendrá su velocidad  $v_0$  en  $\hat{\theta}$ , esto por la ecuación en  $\hat{\theta}$

$$m(\ddot{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0$$

si  $\rho = R$

$$\Rightarrow R^2\dot{\theta} = cte$$

$$R\dot{\theta} = v_0 = cte$$

Por lo tanto, nos interesa saber la velocidad

que agarra en  $\hat{z}$ , así  $\vec{v} = v_0\hat{\theta} + v_z\hat{z}$  y

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_0^2 + v_z^2}$$

ec. en  $\hat{z}$

$$m\ddot{z} = -mg \quad \text{ya no hay Tensión} \\ \ddot{z} = \frac{dz}{dz} \dot{z} \quad \int_R^0 dz$$

$$m \int_0^{\dot{z}_f} \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} dz = -mg \int_R^0 dz$$

$$m \frac{1}{2} \dot{z}_f^2 = -mg(0-R) \Rightarrow \dot{z}_f^2 = 2gR$$

así la rapidez cuando impacta es

$$v_f = \sqrt{4gR + 2gR} \quad v_0^2 = (2v_{\min})^2$$

$$v_f = \sqrt{6gR}$$

spoiler, esto no es más que la conservación del momento angular