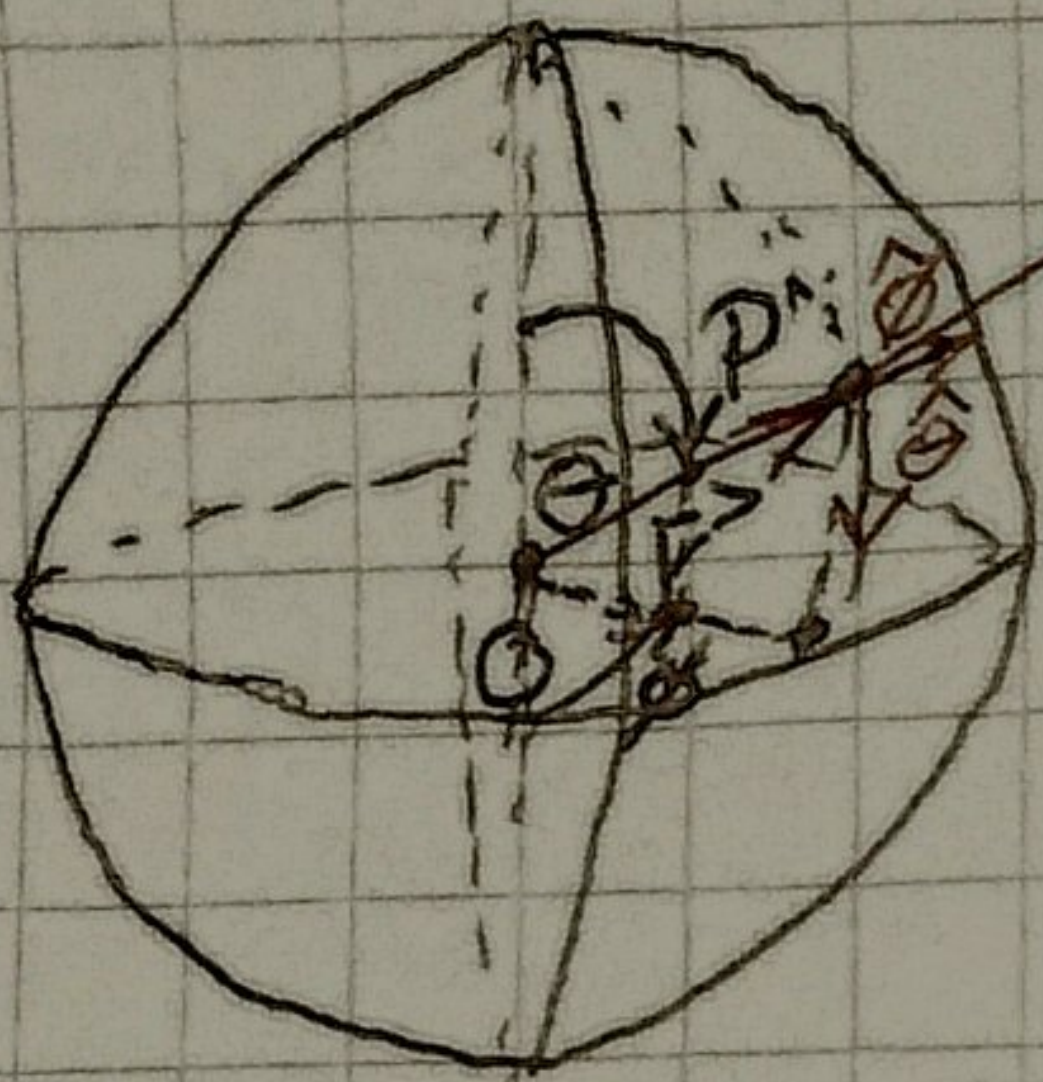


Pauta Auxiliar 4

→ Recuerdo Esfericas



Las coordenadas esfericas son un conjunto de coordenadas ordenadas (r, θ, ϕ) que cubren el completo espacio $\mathbb{R}^3(x, y, z)$.

→ Que sean ordenadas es, $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$, $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$, $\hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$ (regla de la mano derecha).

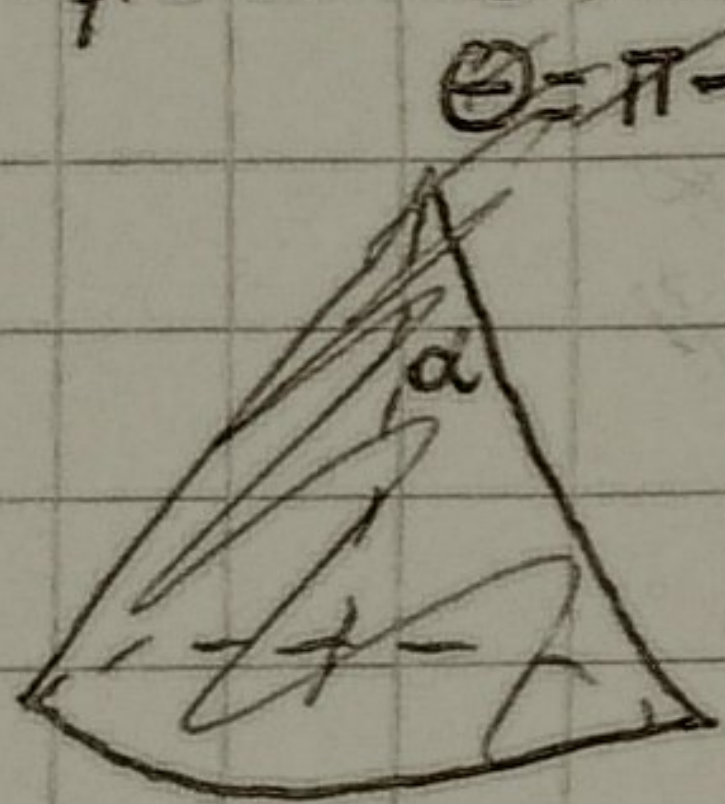
La velocidad en esfericas no es más que,

$$\vec{V} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi}$$

lo cual es la suma de la velocidad radial, la tangencial o polar, y la azimutal respectivamente

→ Para el caso del cono

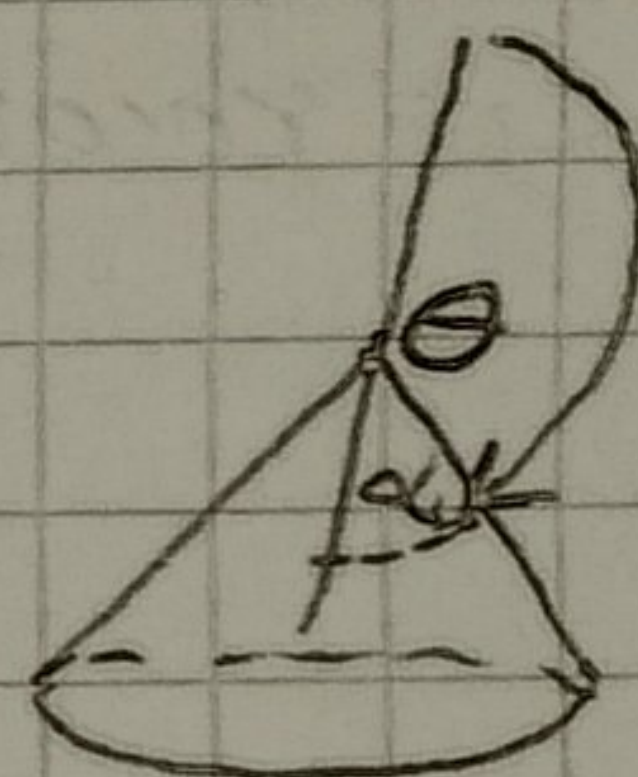
Los conos poseen la particularidad que su ángulo polar (θ) es cte, tal que $\theta = \alpha = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$



$$\theta = \pi - \alpha = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

Por lo que la velocidad queda restringida a el plano (r, ϕ) .

$$\vec{V} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \quad (1)$$



$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

→ Para determinar el tiempo que se tarda en dar una vuelta completa necesariamente debemos encontrar una ecuación que relacione ϕ y t , esto no es más que obtener $\dot{\phi}$ de (1).

~~Metodo~~ → Para obtener $\dot{\phi}$, debemos aplicar las condiciones iniciales que conocemos (r_0, β) , ~~los cuales nos darán el~~

→ Podemos escribir la superficie del cono en forma de Plano.
ya que todo el movimiento sucede en este, elegimos el
origen en donde comienza la partícula.

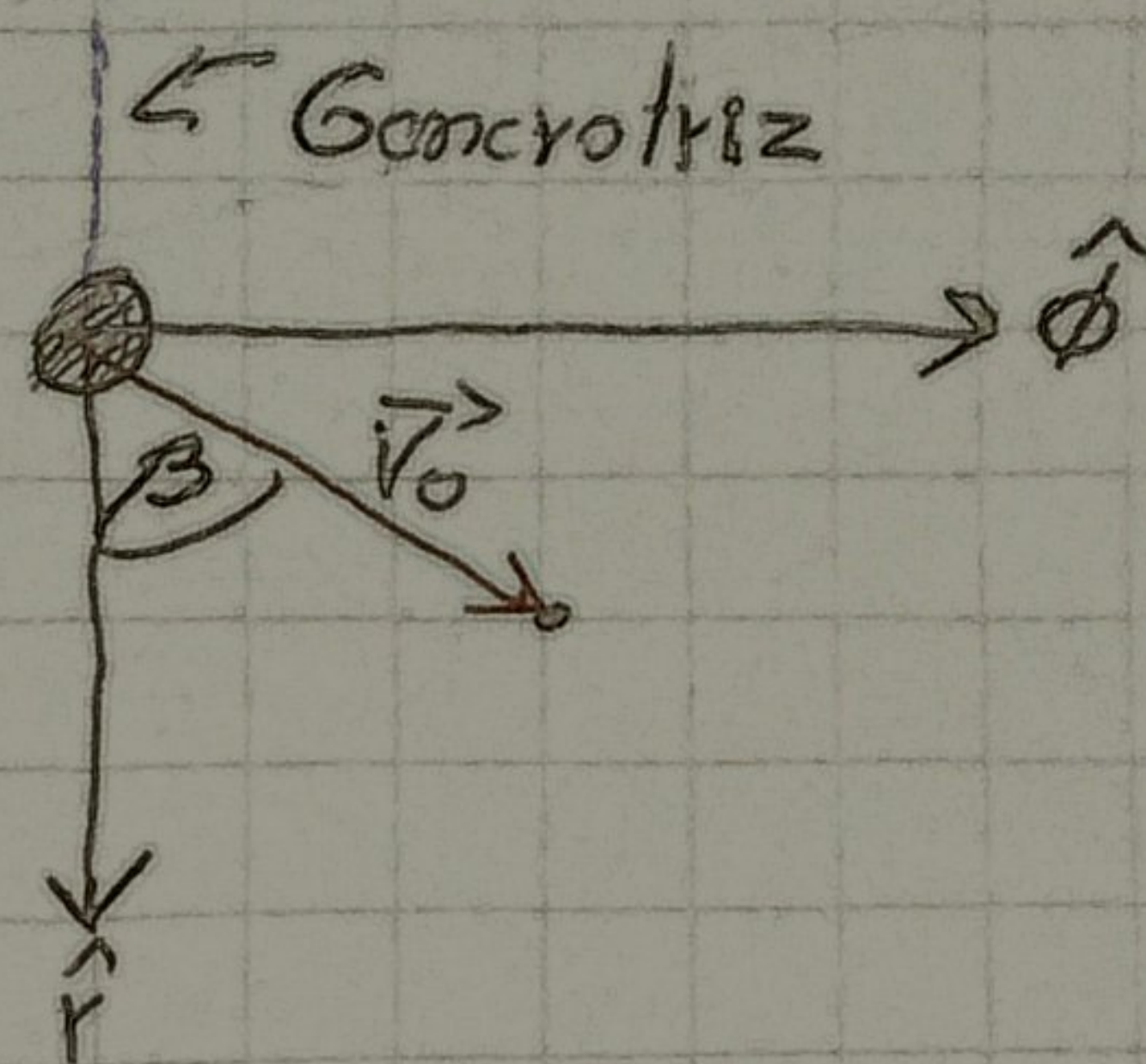
Observamos que

$$\vec{V}_0 = |V_0| \cos \beta \hat{r} + |V_0| \sin \beta \hat{\phi} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \sin \alpha \hat{\phi}$$

Iguando por componentes, es posible
obtener las siguientes ecuaciones:

$$\hat{r}: V_0 \cos \beta = \dot{r} \quad (2)$$

$$\hat{\phi}: V_0 \sin \beta = r \dot{\phi} \sin \alpha \quad (3)$$



→ Queremos obtener ϕ de (3), pero observamos que para eso
necesitamos r , el cual podemos obtener de (2).

$$(2): \dot{r} = \frac{dr}{dt} = V_0 \cos \beta \xrightarrow[t \int dt]{r(t)} \int_{r(0)=r_0}^r dr = V_0 \cos \beta \int_0^t dt \quad (4)$$

"Truco de Mecánica"

arbitrario

El truco consiste en El truco consiste en multiplicar

por diferenciales de tal manera que el lado

Podemos obtener

$\ddot{\theta}(\theta)$ solo de $\dot{\theta}(\theta)$

→ solo de estos, esto es posible con otros diferenciales
como por ejemplo,

Legal

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} \rightarrow \int \ddot{\theta} d\theta = \int \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

Lo cual es muy útil en situaciones de pequeñas oscilaciones.

$$(4): r = r_0 + V_0 \cos \beta t, \text{ reemplazando (4) en (3)}$$

y resolviendo para ϕ tenemos,

$$\frac{V_0 \sin \beta}{\sin \alpha} \frac{1}{r_0 + V_0 \cos \beta t} = \dot{\phi}$$

//
A

$$A \int_0^{t^*} \frac{dt}{r_0 + V_0 \cos \beta t} = \int_0^{2\pi} d\phi$$

Integrando e/r al tiempo

$t^* \rightarrow$ tiempo
 $\int_0^{t^*} dt$ en dar
una vuelta.

$$\begin{aligned}
 \text{CV: } & \left. \begin{aligned} & Y_0 + V_0 \cos \beta t = u \\ & du = V_0 \cos \beta dt \\ & u(0) = Y_0 \\ & u(t^*) = Y_0 + V_0 \cos \beta t^* \end{aligned} \right\} \frac{A}{V_0 \cos \beta} \int_{Y_0}^{Y_0 + V_0 \cos \beta t^*} \frac{du}{u} = 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{2\pi V_0 \cos \beta}{A} = \ln \left(\frac{Y_0 + V_0 \cos \beta t^*}{Y_0} \right) \quad \text{Despejando para } t^*,$$

$$\frac{Y_0 \cdot \exp \left(\frac{2\pi V_0 \cos \beta}{A} \right) - Y_0}{V_0 \cos \beta} = t^* \quad A = V_0 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{Y_0}{V_0 \cos \beta} \left[e^{\frac{2\pi \sin \alpha}{\cos \beta}} - 1 \right] = t^* //$$

Finalmente, debido a que $\vec{V} = V_0 \hat{e}$ es de magnitud constante, la distancia recorrida no es más que

$$S = V_0 t^* //$$