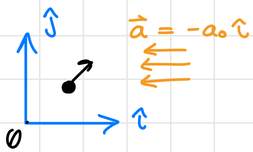
Pauta Aux 2

P1)



$\vec{r}_{inicial} = \vec{0}$

$\vec{v}_{inicial} = v_0 \hat{\imath} + v_0 \hat{j}$

a) Para que $\vec{v}$ sea paralelo a $\hat{j}$, la componente $\hat{\imath}$ de $\vec{v}$ debe ser cero.

Sabemos que $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -a_0 \hat{\imath}$ (por la definición de aceleración $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$)

por componentes

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{v_y(t) = \underbrace{A}_{cte}}$$

$\int dt$

$$\frac{dv_x}{dt} = -a_0 \longrightarrow \int \frac{dv_x}{dt}\, dt = \int (-a_0)\, dt$$

TFC ; a_0 es cte, sale de la integral

$$v_x = -a_0 \int dt$$

$$\boxed{v_x(t) = -a_0 t + \underbrace{B}_{cte}}$$

¿Cómo determinamos las constantes A y B? Con las condiciones iniciales

Sabemos que $\vec{v}_{inicial} = v_0 \hat{\imath} + v_0 \hat{j}$, luego $v_x(t=0) = v_0 \wedge v_y(t=0) = v_0$

Usando las soluciones encontradas anteriormente:

$$A = v_0$$
$$B = v_0$$

Luego, la velocidad de la partícula es

$$\vec{v} = [-a_0 t + v_0]\, \hat{\imath} + v_0 \hat{j}$$

Ahora sí, para que $v_x = 0$, t debe ser igual a $\dfrac{v_0}{a_0}$, $\therefore$ el tiempo que transcurre es

$$t^* = \frac{v_0}{a_0} \quad //$$

b) Una forma útil de calcular el radio de curvatura es

$$\frac{1}{R} = \frac{\| \dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) \|}{\| \dot{\vec{r}}(t) \|^3}$$

esto viene de la forma de la aceleración centrípeta $a_\perp = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{a_\perp}{|\dot{\vec{r}}|^2}$

sólo falta encontrar $\vec{a}_\perp(t)$, para esto hacemos el producto cruz de la aceleración con la tangente (la tangente es $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$)

$$\vec{a}_\perp = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \times \ddot{\vec{r}} \quad , \text{ así } R = \frac{\| \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \times \ddot{\vec{r}} \|}{\|\dot{\vec{r}}\|^2} = \frac{\| \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3}$$

así

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} = [-a_0 t + v_0]\,\hat{\imath} + v_0 \hat{\jmath} \\ \ddot{\vec{r}} &= \vec{a} = -a_0 \hat{\imath} \end{aligned}\right\} \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = -v_0 a_0 \underbrace{\hat{\jmath} \times \hat{\imath}}_{\hat{k}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{\| -v_0 a_0 \hat{k} \|}{\left((-a_0 t + v_0)^2 + v_0^2\right)^{3/2}} = \frac{v_0 a_0}{\left(a_0^2 t^2 - 2 a_0 v_0 t + 2 v_0^2\right)^{3/2}}$$

en $t=0$, $R = \frac{2\sqrt{2}\, v_0^3}{v_0 a_0} = \frac{2\sqrt{2}\, v_0^2}{a_0}$

c) Para esto nos conviene calcular $\vec{r}(t)$, la posición en función del tiempo.

Por definición

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{ó} \quad \frac{dx}{dt} = v_x \ \wedge \ \frac{dy}{dt} = v_y$$

Pero ya conocemos $\vec{v}(t)$, por lo tanto, tenemos

siempre hay que poner una cte cuando calculamos primitivas!

$$\frac{dx}{dt} = -a_0 t + v_0 \xrightarrow[\text{ambos lados}]{\int dt \text{ a}} x(t) = -a_0 \int t\,dt + v_0 \int dt + C$$

$$= -\tfrac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + C$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \longrightarrow y(t) = v_0 \int dt + D = v_0 t + D$$

y usamos las condiciones iniciales para calcular C y D

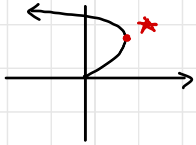
$$x(t=0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \quad \wedge \quad y(t=0) = 0 \Longrightarrow D = 0$$

Entonces $\quad x(t) = -\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t$

$$y(t) = v_0 t$$

¿Qué tanto se aleja del eje y? esto es la posición x

la partícula traza una trayectoria del tipo



obviamente se va al $-\infty$

pero busquemos el punto $\star$, que es un máximo de x, $\frac{dx}{dt} = 0$, esto nos da la siguiente ecuación

$$-a_0 t + v_0 = 0 \implies t^* = \frac{v_0}{a_0} \implies x_{max} = -\frac{1}{2} a_0 \frac{v_0^2}{a_0^2} + \frac{v_0^2}{a_0}$$

$$= \frac{v_0^2}{2a_0} \; //$$

d) Cuando cruza el eje y, $x = 0$, por lo tanto, veamos para qué tiempos x es cero y luego la distancia al origen será evaluar $y(t)$ en ese tiempo

$$x(t) = -\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t = 0 \implies t\left(-\frac{1}{2} a_0 t + v_0\right) = 0$$

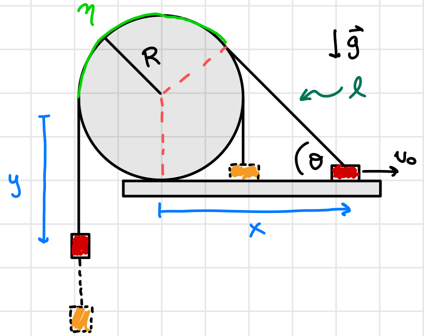
que tiene de soluciones $t^* = 0$

esta es el momento inicial así que no nos interesa

$$\boxed{t^* = \frac{2v_0}{a_0}}$$

Luego la distancia es $v_0 t^* = \frac{2v_0^2}{a_0} \; //$

P2|



- Sea x la posición de la partícula horizontal (medida desde la base del cilindro)

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0$$

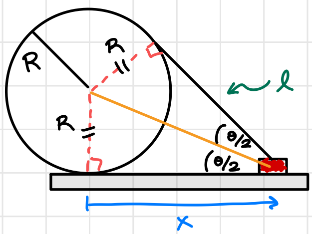
- Sea y la distancia vertical de la cuerda que cuelga.

- El largo de la cuerda es cte, lo que nos da una restricción sobre x e y

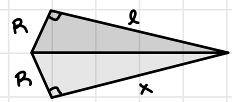
$$L = y + \ell + \eta$$

corresponde a la cuerda enrollada en el círculo (depende de x)

ℓ depende de x, hay que encontrar cuánto vale



se tiene algo así



Son 2 triángulos semejantes, $\therefore \boxed{\ell = x}$

Y luego, se tiene $\boxed{\tan \theta/2 = R/x}$ (i)

a)

Derivemos temporalmente (i)

$$\frac{d}{dt}\tan(\theta/2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{x}\right)$$

$\tan'(x) = \sec^2(x)$

$$\sec^2\theta/2 \cdot \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{R}{x^2}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_0}$$

y usando $x = R/\tan\theta/2$

esto será sólo un número cuando pongamos $\theta = \pi/3$

esto es lo que queremos calcular

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -2v_0 R \frac{\tan^2\theta/2}{R^2}\frac{1}{\sec^2\theta/2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2v_0}{R}\sin^2\theta/2$$

$\sin \pi/6 = \frac{1}{2}$

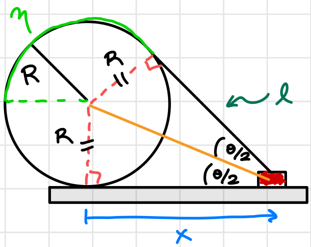
$$= \frac{-v_0}{2R} \quad //$$

b) Para esto, queremos usar la restricción $L = x + y + \eta(x)$ y derivarla temporalmente:

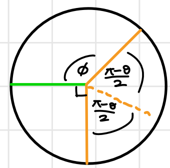
$$0 = \underbrace{\dot{x}}_{v_0} + \dot{y} + \frac{d}{dt}\eta(x)$$

lo que queremos saber

Nos falta encontrar $\eta(x)$



Usando que la suma de los ángulos de los triángulos es π rad, tenemos el siguiente círculo



Queremos saber ϕ, pues $\eta = R\phi$

La suma de los ángulos debe dar 2π :

$$\phi + 2\,\frac{\pi - \theta}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \theta \implies \eta = R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\implies \frac{d}{dt}\eta = R\dot{\theta}$$

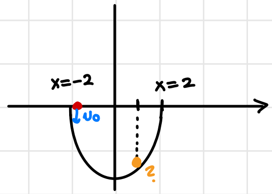
Entonces

$$\dot{y} = -v_0 - R\dot{\theta}$$ para $\theta = \pi/3$ lo conocemos de la parte a)

$$\dot{y}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = -v_0 - R\left(-\frac{v_0}{2R}\right)$$

$$= -\frac{v_0}{2} \quad //$$

P3|



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Si en el instante inicial, la rapidez es v_0, esta se mantendró cte, pues no hay roce ni gravedad

y su trayectoria $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ está restringida por la semielipse, en específico, $y(t)$ debe cumplir

$$y(t) = -3\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Luego la trayectoria es

$$\vec{r}(x) = \left(x, -3\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

velocidad en eje x

velocidad en eje y

Ahora, la rapidez es

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \left\|\left(\dot{x}, +\frac{3\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\dot{x}\right)\right\|$$

$$= |\dot{x}| \left\|\left(1, \frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)\right\|$$

tiene que ser v_0

$$v_0 = |\dot{x}| \sqrt{1 + \frac{9x^2}{16\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}}$$

$$\Longrightarrow |\dot{x}| = v_0 \left[1 + \frac{9x^2}{4(4-x^2)}\right]^{-1/2}$$

Cuando $x=1$, se tiene

$$|\dot{x}| = v_0\left[1 + \frac{3}{4}\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{2v_0}{\sqrt{7}}$$

Ahora sí, a) la velocidad en x es $\dot{x} = \dfrac{2v_0}{\sqrt{7}}$

b) la velocidad en x es

$$\dot{y} = \frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\dot{x}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{4-1}}\frac{2v_0}{\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{7}}\,v_0 \quad //$$

c) La aceleración perpendicular se puede calcular con la fórmula de la aceleración centrípeta

$a_\perp = \dfrac{v^2}{\rho}$, donde ρ es el radio de curvatura

Una forma útil del radio de curvatura es : $\rho = \dfrac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$

(es equivalente a $\dfrac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$)

$$y(x) = -3\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2\sqrt{4-x^2}} \xrightarrow{x=1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{3x}{2}\,\frac{-\frac{1}{2}(-2x)}{(4-x^2)^{3/2}}$$

en $x=1$, el radio de curvatura es

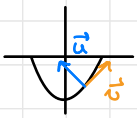
$$\rho = \frac{\left(1+\frac{3}{4}\right)^{3/2}}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\right|} = \frac{\left(7/4\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{4}\,\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{7}{16}\sqrt{21}$$

, luego la aceleración es $a_\perp = v_0^2 \dfrac{16}{7\sqrt{21}}$

d) Toda la aceleración es perpendicular a la velocidad

La velocidad en $x=1$ es

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{7}}\left(2\hat{x}+\sqrt{3}\,\hat{y}\right)$$



El vector $\vec{u}$, perpendicular a $\vec{v}$ y que apunta hacia el centro del radio de curvatura es

$$\vec{u} = -\sqrt{3}\,\hat{x} + 2\hat{y}$$ (comprobar $\vec{v}\cdot\vec{u}=0$)

y si lo normalizamos es $\underbrace{\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(-\sqrt{3}\,\hat{x}+2\hat{y}\right)}$

Esta es la dirección de la aceleración

$$\vec{a} = a_\perp \hat{u} = v_0^2 \frac{16}{7\sqrt{21}}\,\frac{1}{\sqrt{7}}\left(-\sqrt{3}\,\hat{x}+2\hat{y}\right)$$

Nos interesa la componente $\hat{x}$

$$\implies \boxed{\ddot{x}\Big|_{x=1} = -v_0^2\,\frac{16}{49}}$$