FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Problemas resueltos para el curso FI1001 Introducción a la física newtoniana

Rodrigo Sabaj Saavedra

rgosabaj@gmail.com

24/05/2013

Contenido

Prefacio

Este trabajo nace de los comentarios de algunos estudiantes que señalan: “hice el ejercicio pero no sé si está bien porque no tiene pauta”. Ante esto, la idea original fue presentar un compilado de ejercicios pero con respuesta, sin desarrollo. El comentario que surgió esta vez fue: “es útil, pero más útil sería si tiene desarrollo, pues así se puede comparar con el realizado por uno”. Así, se comenzó con la recopilación de ejercicios que, a mi humilde opinión, resultan representativos de lo que se solicita a los estudiantes del curso FI1001 Introducción a la física newtoniana, intentando abarcar todos los conocimientos que se adquieren en el dicho curso, desde lo más básico hasta un nivel de dificultad que, espero, supere la dificultad de las evaluaciones comunes del curso. La idea de esta guía es que se cuente con el desarrollo y respuesta final para su comparación y que el estudiante no tome esta guía para leerla sin ejercitar, pues de esta forma el aprendizaje es prácticamente nulo.

Los problemas han sido rescatados principalmente de evaluaciones anteriores, ya sea controles anteriores o de ejercicios evaluados en las diferentes secciones, tanto en el curso anual que se dictaba en el antiguo plan de estudios como en el curso semestral que nos rige actualmente. En estos casos, se indica a qué control y a qué semestre o año pertenecen; en el caso de ser un ejercicio se indica también el profesor que lo planteó. También se obtuvieron algunos ejercicios de los libros *Introducción a la mecánica* (Herbert Massmann), *Física Universitaria* (Searz, Zemansky, Young, Freedman) y *Problemas seleccionados de física elemental* (Bújovtsev, Krívchenkov, Miákishev, Saráeva) y otros tantos de guías de ejercicios planteadas por algunos profesores como Hugo Arellano, Andrés Meza y Álvaro Núñez.

Aunque he revisado más de una vez este trabajo, siempre se escapan errores. Por este motivo, invito a quienes utilicen este material para su estudio que me escriban para señalarme sus correcciones. Pido disculpas de antemano por los errores presentados. Además, si alguien propone alguna idea para un desarrollo o para su explicación, su correo será muy bienvenido. De esta forma, espero que los estudiantes tengan una participación activa en este trabajo.

Agradezco a todas las personas que aportaron con su opinión durante el desarrollo de esta guía para que su formato sea lo más amistoso posible. Agradezco también, las correcciones que los estudiantes de la sección 4, año 2012 hicieron a este trabajo durante su estudio.

Solicito humildemente que estos problemas queden para el estudio del alumnado y no sea aprovechado por los profesores auxiliares para realizar sus clases auxiliares. No es la finalidad de este trabajo ahorrarle trabajo a otras personas sino ayudar al estudiante. Existen muchos problemas para hacer en clases.

Espero que este trabajo sea del gusto de los estudiantes y se transforme en una herramienta útil. Éxito a todos.

Unidad 0

Análisis dimensional

• Problema 1

Determinar las dimensiones de E, si

$$E = \frac{xz}{y^2}$$

y sabiendo asimismo que la expresión:

$$\rho \cdot v \cdot ln\left(\frac{mx}{t}\right) = y \cdot tan\left(\theta + \frac{my}{z}\right)$$

es dimensionalmente correcta, siendo ρ la densidad volumétrica, v la rapidez y m la masa.

Se debe tener claro que el argumento de funciones trigonométricas, exponenciales y logaritmos deben tener un argumento adimensional, así:

$$[x] = M^{-1}T$$

Luego, el análisis dimensional de estas funciones resulta ser adimensional, de esta forma se debe cumplir

$$[y] = [\rho][v] = ML^{-3} \cdot LT^{-1} = ML^{-2}T^{-1}$$

En este problema rescatamos, además, que los ángulos también son adimensionales: $[\theta] = 1$. Entonces, z debe cumplir que

$$[z] = [m][y] = M \cdot ML^{-2}T^{-1} = M^2L^{-2}T^{-1}$$

Finalmente, las dimensiones de E son:

$$[E] = \frac{[x][z]}{[y]^2} = \frac{M^{-1}TM^2L^{-2}T^{-1}}{(ML^{-2}T^{-1})^2} = \frac{ML^{-2}}{M^2L^{-4}T^{-2}} = M^{-1}L^2T^2$$

• Problema 2: Ejercicio 1, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones

A partir de las constantes de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$, de la masa terrestre $M_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$ y su radio $R_T = 6{,}3 \cdot 10^6\ kg$, construya una cantidad con dimensiones de velocidad y estime su valor numérico con una cifra significativa.

Ya que nos dan las unidades de medida, es fácil ver que las dimensiones quedan dadas por:

$$[G] = L^3T^{-2}M^{-1}\ ,\ [M_T] = M\ ,\ [R_T] = L$$

Como se desea construir una cantidad con dimensiones de velocidad, se cumplirá

$$LT^{-1} = (L^3T^{-2}M^{-1})^{\propto}M^{\beta}L^{\gamma}$$

obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

para L: $1 = 3\alpha + \gamma$

para T: $-1 = -2\alpha$

para M: $0 = -\alpha + \beta$

De la ecuación para T obtenemos $\alpha = \frac{1}{2}$ y reemplazando en las otras dos ecuaciones, resulta $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$.

La cantidad solicitada va a estar dada por

$$v = f(k)\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

con $f(k)$ un valor adimensional. Si consideramos este valor igual a 1, la estimación queda dada por

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}3 \cdot 10^{6}}}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \approx \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{7}}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \approx \sqrt{66{,}7}\ \cdot 10^{3}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$v \approx 8\ \cdot 10^{3}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Para los curiosos: la expresión obtenida corresponde a la denominada rapidez de escape, que es la rapidez con que debe ser lanzado un proyectil para que escape de la Tierra y está dada por la expresión

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

tomando el valor de 11.200 metros por segundo o 40.200 kilómetros por hora.

- Problema 3: Pregunta 1, prueba azul, 38va Olimpiada Internacional de Física, Isfahán Irán 2007.

1) *Encuentre las dimensiones de las constantes fundamentales, es decir, la constante de Planck h, la velocidad de la luz c, la constante de gravitación universal G y la constante de Boltzmann k_B en función de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.*

Nota: Considere la ley de gravitación universal de Newton $\left|\vec{F}\right| = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$, la energía de un fotón dada por la relación de Planck $E = h\nu$, donde ν es la frecuencia del rayo de luz, y la energía cinética media de las moléculas de un gas $E = \frac{3}{2}k_B T$.

Partamos por c, que es una unidad de rapidez

$$[c] = LT^{-1}$$

Por la 2da Ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$. Luego despejamos G y hacemos el análisis dimensional

$$[G] = \left[\frac{Fr^2}{m_1 m_2}\right] = \frac{[F][r^2]}{[m_1 m_2]} = \frac{[ma][r^2]}{[m_1 m_2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

La energía tiene las mismas dimensiones que el trabajo, definido como $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ y la frecuencia es el inverso del periodo, el que tiene dimensiones de tiempo.

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{[\vec{F}][\Delta\vec{r}]}{[\nu]} = \frac{MLT^{-2}L}{T^{-1}} = ML^2T^{-1}$$

Los números son unidades adimensionales, por lo que asumimos que su análisis dimensional es 1.

$$[k_B] = \left[\frac{3}{2}\right]\frac{[E]}{[T]} = 1\,\frac{ML^2T^{-2}}{K} = ML^2T^{-2}K^{-1}$$

2) *La ley de Stefan-Boltzmann señala que la potencia emisiva de un cuerpo negro, que es la energía radiada por unidad de superficie de un cuerpo negro, en unidad de tiempo es igual a σT^4, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y T es la temperatura absoluta del cuerpo. Determine las dimensiones de la constante de Stefan-Boltzmann en términos de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.*

El enunciado nos indica que la potencia por unidad de área es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta, así

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

$$[\sigma] = \frac{[E]}{[t][A][T^4]} = \frac{ML^2T^{-2}}{TL^2K^4} = MT^{-3}K^{-4}$$

3) *La constante de Stefan-Boltzmann no es una constante fundamental, por lo que puede ser escrita en términos de las constantes fundamentales, es decir, $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma {k_B}^\delta$, donde a es una constante adimensional. Encuentre los valores de α, β, γ y δ usando análisis dimensional.*

Se tiene que

$$[\sigma] = [a][h]^\alpha[c]^\beta[G]^\gamma[k_B]^\delta$$

$$MT^{-3}K^{-4} = 1(ML^2T^{-1})^\alpha(LT^{-1})^\beta(L^3M^{-1}T^{-2})^\gamma(ML^2T^{-2}K^{-1})^\delta$$

$$MT^{-3}K^{-4} = M^{\alpha-\gamma+\delta}\,L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta}\,T^{\alpha-\beta-2\gamma-\delta}K^{-\delta}$$

Igualando los exponentes, podemos crear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\text{M: } 1 = -\alpha - \gamma + \delta$$
$$\text{L: } 0 = 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta$$
$$\text{T: } -3 = \alpha - \beta - 2\gamma - \delta$$
$$\text{K: } -4 = -\delta$$

De la ecuación para K:

$$\delta = 4.$$

Además si sumamos la ecuaciones de M, L y T tenemos

$$-2 = 2\alpha + 2\delta$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(-2 - 8)$$

$$\alpha = -5$$

De la ecuación para M:

$$\gamma = \alpha + \delta - 1 = -5 + 2 - 1$$

$$\gamma = -4$$

Finalmente, de la ecuación para T:

$$\beta = \alpha - 2\gamma - \delta + 3 = -5 + 8 - 4 + 3$$

$$\beta = 2$$

Unidad 1

Cinemática

• Problema 1

Los sismos generan varios tipos de ondas, siendo las más conocidas las ondas P (primarias o de presión) y las ondas S (secundarias o de corte), las cuales viajan con rapidez v_P y v_S respectivamente, siendo $v_P > v_S$. Para determinar a qué distancia se produjo el sismo, una estación determina la diferencia de tiempo en que se demoran las ondas en llegar a ella. Si la diferencia medida es T, ¿a qué distancia se produjo el sismo?

Tomando como origen el lugar donde se produjo el sismo y sentido positivo el lugar hacia donde se encuentra la estación, las ecuaciones de itinerario para las ondas son

$$x_P = v_P t$$

$$x_S = v_s t$$

Sea t_1 y t_2 el tiempo que demoran las ondas en llegar a la estación, sea x la distancia a la cual se encuentra esta. Se tiene

$$x = v_P t_1$$

$$x = v_S t_2$$

Del enunciado se obtiene que

$$t_2 - t_1 = T$$

Despejando los tiempos de cada ecuación y restando

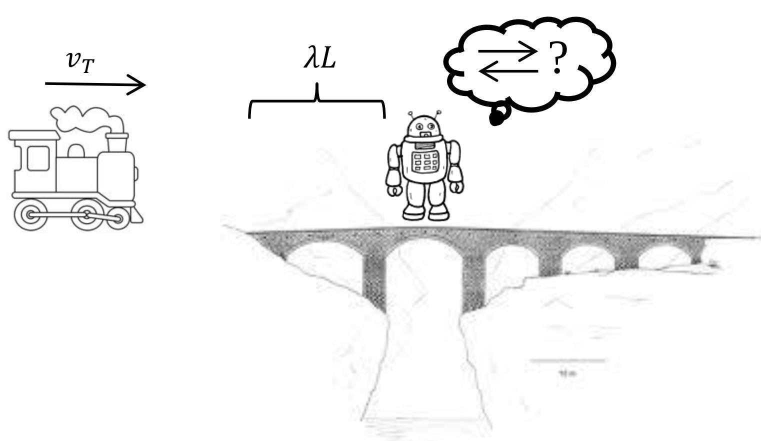
$$t_2 - t_1 = \frac{x}{v_S} - \frac{x}{v_P}$$

Así

$$x = T\frac{v_P v_s}{v_P - v_S}$$

• Problema 2

Un robot sobre un puente de longitud L, avista un tren acercándose con rapidez v_T. En ese instante el robot se encuentra a una distancia λL del extremo del puente, en dirección al tren. Para evitar el tren, el robot contempla ambas salidas para abandonar el puente y concluye que en cada caso es alcanzado por el tren justo al momento de salir. Determine la rapidez del robot.



Tomando como origen del sistema de referencia el inicio del puente y asumiendo que el tren se encuentra a una distancia D de este punto, se tienen las siguientes ecuaciones de itinerario para cada caso.

Caso 1: El robot sale hacia la izquierda.

$$x_R = \lambda L - v_R t$$

$$x_T = -D + v_T t$$

Caso 2: El robot sale hacia la derecha

$$x_R = \lambda L + v_R t$$

$$x_T = -D + v_T t$$

En el primer caso, la posición final de ambos es $x = 0$; en el segundo, $x = L$. Además, el tiempo que se demora cada uno en llegar a los puntos mencionados es el mismo, por lo que las ecuaciones quedan

$$0 = \lambda L - v_R t_1 \ (1)$$

$$0 = -D + v_T t_1 \ (2)$$

$$L = \lambda L + v_R t_2 \ (3)$$

$$L = -D + v_T t_2 \ (4)$$

Tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas, por lo que el sistema se puede resolver. Restando (4) con (2) para que desaparezca el término D y luego sumando (3) con (1) para obtener el mismo factor que contiene los tiempos, se obtiene

$$(4) - (2): L = v_T(t_2 - t_1)$$

$$(3) + (1): L = 2\lambda L + v_R(t_2 - t_1)$$

Dividiendo ambas ecuaciones para eliminar el término $(t_2 - t_1)$

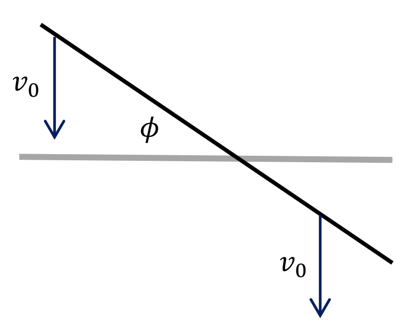
$$\frac{L}{L - 2\lambda L} = \frac{v_T}{v_R}$$

De donde se obtiene

$$v_R = (1 - 2\lambda) v_T$$

• Problema 3

Considere dos varillas muy largas: una fija horizontalmente y la otra formando un ángulo ϕ constante con la primera y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante. Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas (tal punto de intersección no corresponde al movimiento de algún objeto físico real).



Los puntos de la varilla cumplen

$$\Delta y = v_0 t$$

Tomemos un punto a una distancia L de la varilla horizontal (no del punto de intersección), el tiempo que se demora en cruzar la varilla horizontal es

$$t = \frac{L}{v_0}$$

Sea x la distancia que recorre el punto de intersección cuando el punto elegido desciende L, así se cumple

$$\tan(\phi) = \frac{L}{x}$$

Finalmente, la velocidad con que se mueve el punto de intersección es:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{\frac{L}{\tan(\phi)}}{\frac{L}{v_0}} = v_0 \cot(\phi)$$

• Problema 4

Una patrulla viaja con rapidez constante v_P y es sobrepasado por un conductor que maneja su vehículo con rapidez $\frac{3}{2}v_P$. Ante el temor de ser multado, decide frenar uniformemente cuando este en la misma posición con la patrulla. ¿Qué velocidad llevará el conductor cuando este sea alcanzado por la patrulla?

La forma más fácil de solucionar el problema pero no tan intuitiva, es notar que ambos vehículos recorren la misma distancia en el mismo tiempo, por lo cual la velocidad media es la misma que la de la patrulla. Como la aceleración es uniforme, la velocidad media es el promedio de las velocidades inicial y final, así

$$v_P = \frac{\frac{3}{2}v_p + v'}{2}$$

$$v' = \frac{1}{2}v_P$$

La otra opción es escribir las ecuaciones para los móviles

$$x_P = v_P t$$

$$x_c = \frac{3}{2}v_P t - \frac{1}{2}at^2$$

$$v_c = \frac{3}{2}v_P - at$$

Igualando las dos primeras, se obtiene el tiempo de intersección

$$v_P t' = \frac{3}{2}v_P t' - \frac{1}{2}at'^2$$

$$t' = \frac{v_P}{a}$$

Reemplazando en la segunda

$$v_c' = \frac{1}{2} v_P$$

• Problema 5

Un día sábado, un estudiante sale atrasado a rendir el control, por lo que decide tomar un taxi que está a una distancia d, para lo cual corre con velocidad constante v. El taxi comienza su marcha con aceleración a cuando se encuentra a la distancia señalada. ¿Durante cuánto tiempo y qué distancia recorre el estudiante para alcanzar el taxi? ¿Qué velocidad tiene éste en ese instante? ¿Cuál es la velocidad mínima con que el estudiante debe correr para alcanzar el taxi? Haga un gráfico posición versus tiempo del problema, tomando como origen el lugar donde se encontraba el estudiante.

Las ecuaciones que representan la situación son

$$x_e = vt$$

$$x_T = d + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_T = at$$

Igualando las posiciones se obtiene el tiempo

$$vt' = d + \frac{1}{2} a t'^2$$

$$t' = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}}{a}$$

De esto se obtiene que

1. Si $v^2 > 2ad$, el estudiante alcanza 2 veces el taxi;
2. Si $v^2 = 2ad$, el estudiante alcanza 1 vez al taxi, de aquí se obtiene la velocidad mínima requerida para alcanzar el taxi;
3. Si $v^2 < 2ad$, el estudiante no alcanza al taxi.

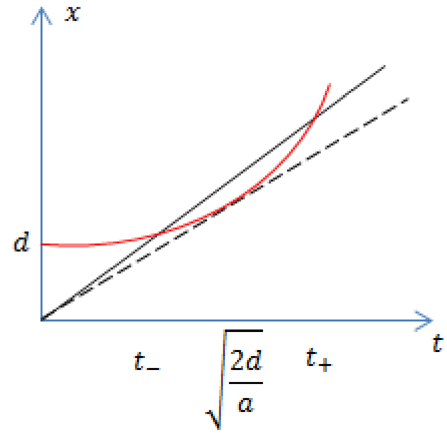
La distancia recorrida es

$$x_e' = v \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}}{a}$$

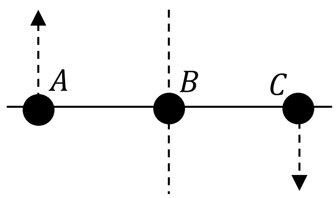
La rapidez del taxi es

$$v_T' = v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}$$

Finalmente, siendo la curva roja el taxi, la curva negra el caso de dos soluciones y la línea continua el caso crítico, el gráfico queda



• Problema 6



Tres cuerpos A, B y C se encuentran inicialmente sobre una recta horizontal, de forma tal que la distancia que separa los dos primeros es la misma que separa B con C. El punto A comienza a moverse verticalmente hacia arriba con velocidad constante v, mientras que C comienza a moverse con aceleración constante a y velocidad inicial nula pero en sentido contrario a A. Si todos los cuerpos comienzan a moverse simultáneamente, determine cómo se debe mover B en el eje vertical para que los cuerpos formen todo el tiempo una recta.

Sea L la distancia que separa los cuerpos. La condición para que los cuerpos formen una recta es la pendiente de la recta que une A con B sea la misma que la de la recta que une C con B.

Sean y_A, y_B y_C las posiciones de dichos cuerpos, la cuales cumplen

$$y_A = vt$$

$$y_C = -\frac{1}{2}at^2$$

La condición señalada en un principio se traduce a

$$\frac{y_A - y_B}{L} = \frac{y_B - y_C}{L}$$

$$y_A - y_B = y_B - y_C$$

Notar que ambos lados de esta expresión son positivos, ya que $y_A > |y_B|$ y $|y_B| < |y_C|$. Luego obtenemos

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1}{2}(vt - \frac{1}{2}at^2)$$

Es decir, B debe moverse de forma tal que su velocidad inicial sea la mitad de la velocidad de A y su aceleración sea la mitad de la de C.

• Problema 7

Una piedra se deja caer desde un puente de altura h. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo T segundos más tarde. Si ambas llegan simultáneamente al río, ¿cuál es la velocidad inicial de la segunda piedra?

Las ecuaciones que describen cada piedra son

$$y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_2 = h - v_2(t - T) - \frac{1}{2} g (t - T)^2, t > T$$

El tiempo de vuelo lo obtenemos de la primera ecuación, al imponer $y_1 = 0$

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

el cual lo reemplazamos en la segunda y despejamos

$$0 = h - v_2\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T\right) - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T\right)^2$$

$$v_2 = \frac{h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T\right)^2}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - T}$$

• Problema 8

Se deja caer una piedra desde el borde superior de un pozo. Pasado un tiempo T se escucha el sonido del choque de la piedra con el agua. Determine la profundidad del pozo si la velocidad del sonido es u.

El tiempo de vuelo de la piedra es

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Mientras que el tiempo que se demora el sonido en llegar a oídos de quien lanzó la piedra es

$$t_s = \frac{h}{u}$$

Así, se cumple que

$$t_v + t_s = T$$

relación que nos permite despejar la altura

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{h}{u}=T$$

$$\frac{2h}{g}=T^2-2T\frac{h}{u}+\frac{h^2}{u^2}$$

$$h=\frac{\frac{2T}{u}+\frac{2}{g}\pm\sqrt{\left(\frac{2T}{u}+\frac{2}{g}\right)^2-\frac{4T^2}{u^2}}}{\frac{2}{u^2}}=\frac{\frac{2T}{u}+\frac{2}{g}\pm\sqrt{\frac{8T}{ug}+\frac{4}{g^2}}}{\frac{2}{u^2}}$$

Debemos tomar la menor solución, ya que la otra nos daría una altura del orden de kilómetros.

$$h=uT+\frac{u^2}{g}-u^2\sqrt{\frac{2T}{ug}+\frac{1}{g^2}}$$

$$h=uT+\frac{u^2}{g}\left(1-\sqrt{\frac{2Tg}{u}+1}\right)$$

• Problema 9

1. Un malabarista actúa en un recinto cuyo techo está 5 m arriba del nivel de las manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo.
a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo?

2. En el instante en que la primera pelota está en el techo, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras partes de la velocidad inicial de la primera.
a) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan las dos pelotas en el aire?
b) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas?

1. Las ecuaciones de la pelota son

$$y=y_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v=v_0-gt$$

Sabemos que en el punto más alto, la velocidad de la pelota es cero; tomando como origen del sistema de referencia la mano del malabarista, se tiene

$$h=v_0t'-\frac{1}{2}gt'^2$$

$$v_0=gt'$$

Despejando el tiempo en la 2da ecuación, reemplazamos en la primera

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 10\left[\frac{m}{s}\right]$$

Luego, el tiempo que se demora en llegar al techo es

$$t' = \frac{v_0}{g} = 1[s]$$

2. Manteniendo el sistema de referencia, las ecuaciones para cada pelota son

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_1 = -gt$$

$$y_2 = \frac{2}{3}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_2 = \frac{2}{3}v_0 - gt$$

Para despejar el tiempo en que se demoran en coincidir, igualamos y_1 con y_2

$$y_1 = y_2$$

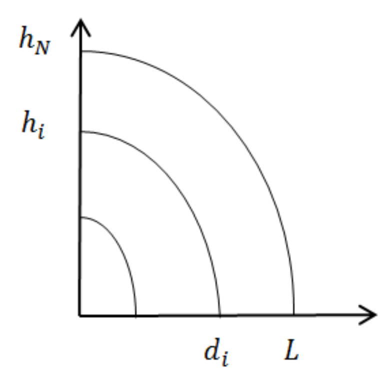
$$h - \frac{1}{2}gt''^2 = \frac{2}{3}v_0 t'' - \frac{1}{2}gt''^2$$

$$t'' = \frac{3h}{2v_0} = 0{,}75\ [s]$$

La altura en que se cruzan es

$$y = h - \frac{1}{2}gt''^2 = h - \frac{9gh^2}{8v_0^2} = 2{,}19\ [m]$$

• Problema 10: Pregunta 1, control 1 2004



N partículas ubicadas a diferentes alturas $h_1, h_2, \ldots, h_N$ sobre el eje y son lanzadas simultáneamente con la misma velocidad $\vec{v} = v\,\hat{\imath}$. Por la acción de la fuerza de gravedad terrestre, las partículas aterrizan en distintos puntos sobre el eje x.

1) Encuentre las alturas h_i en función del índice i y los datos del problema para que los puntos donde aterrizan las partículas d_i estén uniformemente distribuidos entre $x \in [0, L]$, i.e. que la distancia entre el origen y el primer punto de aterrizaje y las distancias entre dos puntos seguidos cualesquiera, sea constante e *igual para todos ellos.*

2) ¿Con qué retardo habría que lanzar las diferentes partículas para que aterrizaran simultáneamente, conservando una distribución uniforme sobre el eje x?

1) Tomando como origen el vértice entre suelo y vertical, las ecuaciones que describen la i-ésima partícula son

$$x_i = vt$$

$$y_i = h_i - \frac{1}{2}gt^2$$

Como los alcances deben ser uniformemente distribuidos, el punto de llegada de la i-ésima partícula es (compruebe con los casos N=1,2,3)

$$x_i(y = 0) = i\frac{L}{N}$$

Luego el tiempo de vuelo está dado por

$$t' = \frac{iL}{vN}$$

e imponiendo $y_i(t') = 0$ obtenemos

$$h_i = \frac{g}{2}\left(\frac{iL}{vN}\right)^2$$

2) Los tiempos de vuelo deben cumplir

$$t_i + t_{retardo} = t_{i+1}$$

Así

$$t_{retardo} = t_{i+1} - t_i = \frac{(i+1)L}{vN} - \frac{iL}{vN} = \frac{L}{vN}$$

• Problema 11: Basado en Pregunta 1, control 1, semestre otoño 2009

En la famosa batalla de Punta Angamos, acaecida el 8 de octubre de 1879 el capitán de fragata Juan José Latorre (La calle Almirante Latorre lleva este nombre en su honor) dio la orden de disparar una de las piezas de artillería desde la cubierta del blindado chileno Cochrane, ubicadas a una altura h sobre el nivel del mar, la cual impactó en la torre de mando del acorazado peruano Huáscar, ubicada a una altura H según la misma referencia, provocando la muerte del almirante Grau. Si ambos barcos estaban separados por una distancia d, determine

1) El mínimo valor de la componente vertical de la velocidad con que pudo ser lanzado el proyectil

2) El mínimo valor de la componente horizontal de la velocidad encontrada en A para que el proyectil pudiese dar en su blanco. Debe considerar la respuesta encontrada en la pregunta anterior.

3) Dadas dichas condiciones, determine la rapidez del proyectil.
4) Con el módulo de la velocidad calculado en la pregunta anterior, determine el ángulo con que debió haber sido lanzado ese proyectil para que hubiese alcanzado la caldera del Huáscar, ubicada a nivel del mar.

Las ecuaciones para el proyectil son

$$x = v_x t$$

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{y0} - g t$$

1) La mínima velocidad vertical inicial se obtiene imponiendo que el proyectil llegue con velocidad nula a la altura deseada. De la tercera ecuación

$$0 = v_{y0} - g t'$$

$$t' = \frac{v_{y0}}{g}$$

Reemplazando en la segunda

$$H - h = \frac{{v_{y0}}^2}{g} - \frac{{v_{y0}}^2}{2g} = \frac{{v_{y0}}^2}{2g}$$

$$v_{y0} = \sqrt{2g(H-h)}$$

2) Con el tiempo de vuelo obtenido, se obtiene la mínima velocidad horizontal

$$d = v_x t'$$

$$v_x = \frac{d}{t'} = d\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$$

3) La rapidez inicial es

$$v_0 = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{d^2 g}{2(H-h)} + 2g(H-h)}$$

4) En las ecuaciones escritas en un comienzo, reemplazamos la rapidez anterior e imponemos las condiciones para poder alcanzar las calderas

$$d = v_0 \cos(\theta)\, t^*$$

$$-h = v_0 \sin(\theta)\, t^* - \frac{1}{2} g {t^*}^2$$

Despejando el tiempo de la primera ecuación y remplazando en la segunda

$$-h = v_0 \sin(\theta) \frac{d}{v_0 \cos(\theta)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2$$

Usando la igualdad trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \tan^2(\theta) + 1$$

Queda la siguiente ecuación de segundo grado

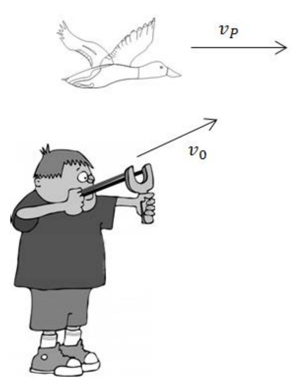
$$-h = d\tan(\theta) - \frac{gd^2}{2{v_0}^2}\tan^2(\theta) - \frac{gd^2}{2{v_0}^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 2\frac{gd^2}{{v_0}^2}\left(\frac{gd^2}{2{v_0}^2} + h\right)}}{\frac{gd^2}{{v_0}^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{{v_0}^2}{gd} \pm \sqrt{1 + 2\frac{g}{{v_0}^2}\left(\frac{gd^2}{2{v_0}^2} + h\right)}$$

De aquí se aprecia que existen 2 ángulos posibles de lanzamiento para impactar las calderas.

• Problema 12: Ejercicio 3, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones



Un pato vuela horizontalmente en línea recta con velocidad v_P a una altura h del suelo. Rodrigo, con una honda, puede lanzar piedras con una velocidad v_o y hace uso de su arma en el instante que el pato lo sobrevuela.

1) ¿Cuál es el ángulo respecto a la vertical con que debe disparar la piedra?

2) ¿Qué distancia alcanza a recorrer el pato antes de ser alcanzado?

3) ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener el proyectil para que llegue al pato?

Como siempre, primero escribimos las ecuaciones cinemáticas para ambos cuerpos, tomando como origen al niño y el suelo. Para el pato se tiene

$$x_{pato} = v_p t$$

y para la piedra

$$x_{piedra} = v_o \sin(\alpha)\, t$$

$$y_{piedra} = v_o \cos(\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_0 \cos(\alpha) - gt$$

1) Para que la piedra pueda impactar al pato se debe cumplir que las velocidades de ambos en el eje x sean iguales, es decir,

$$v_o \sin(\alpha) = v_p$$

$$\sin(\alpha) = \frac{v_p}{v_o} \text{ o, alternativamente, } \alpha = \arcsin\left(\frac{v_p}{v_o}\right)$$

2) Cuando el pato es alcanzado se cumple

$$h = v_o \cos(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \ (*)$$

En esta expresión nos falta conocer $\cos(\alpha)$ para lo cual hacemos uso de la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$$

y haciendo uso de lo obtenido en la parte (1)

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^2}$$

Reemplazando en $(*)$

$$h = v_o \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^2}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_o \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^2}\, t + h = 0$$

de donde despejamos el tiempo

$$t = \frac{v_o \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^2} \pm \sqrt{v_0^2 \left(1 - \left(\frac{v_p}{v_0}\right)^2\right) - 2gh}}{g} = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_p^2} \pm \sqrt{v_0^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}$$

Tomamos la solución mínima, la cual indica el tiempo en que es alcanzado el pato cuando la piedra va subiendo, puesto que también puede ser alcanzado cuando la piedra va bajando.

$$t^* = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_p^2} - \sqrt{v_0^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}$$

De esta forma, la distancia recorrida por el pato es

$$x_{pato} = v_p t^*$$

3) Finalmente, la rapidez mínima del proyectil se obtiene imponiendo que la rapidez vertical de la piedra sea nula cuando impacte al pato

$$v_y = 0 = v_i - gt$$

$$t = \frac{v_i}{g}$$

Reemplazando en la ecuación para y

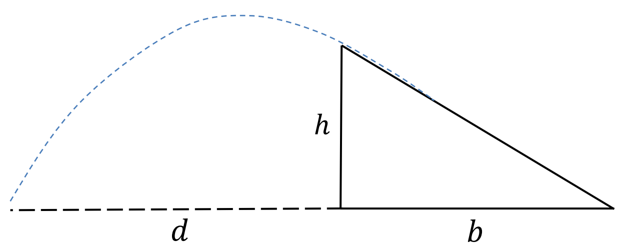
$$h = v_i t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_i^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i}{g}\right)^2$$

$$v_i = \sqrt{2gh}$$

De esta forma la rapidez mínima es

$$v_{mín} = \sqrt{v_x^2 + v_i^2} = \sqrt{v_p^2 + 2gh}$$

• Problema 13: Pregunta 1, examen semestre otoño 2008



Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b, determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

Las ecuaciones que describen el movimiento de la bengala son

$$x = v_x t$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt \ (1)$$

En $t = t'$ se debe cumplir que

$$d = v_x t' \ \ (2)$$

$$h = v_{0y} t' - \tfrac{1}{2} g t'^2 \ (3)$$

Además, para que llegue paralela al tobogán se debe cumplir que las pendientes de la velocidad y la de aquel sean iguales, es decir,

$$\frac{v_y(t')}{v_x} = -\frac{h}{b} \ \ (4)$$

Notar que se toma el signo negativo porque el valor de v_y al llegar al tobogán es negativo. De esta ecuación despejamos

$$v_y(t') = -\frac{h}{b} v_x$$

Despejando t' en la ecuación (2) y reemplazando ambos resultados en la ecuación (1), obtenemos

$$-\frac{h}{b} v_x = v_{0y} - \frac{gd}{v_x} \ (*)$$

Reemplazando t' en (3)

$$h = \frac{v_{0y} d}{v_x} - \frac{g d^2}{2 v_x^2}$$

Manipulando $(*)$

$$-\frac{hd}{b}=\frac{v_{0y}d}{v_x}-\frac{gd^2}{v_x^2}$$

De estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$h\left(1+\frac{d}{b}\right)=\frac{gd^2}{2v_x^2}$$

$$v_x=d\sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}}$$

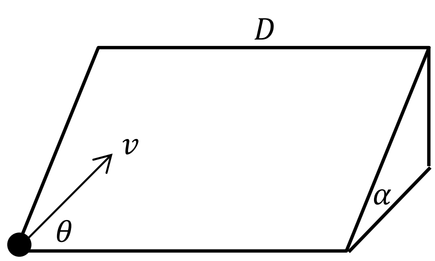
En $(*)$

$$v_{0y}=\frac{gd}{v_x}-\frac{h}{b}v_x=g\sqrt{\frac{2h(b+d)}{gb}}-\frac{hd}{b}\sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}}=2(b+d)\sqrt{\frac{gh}{2b(b+d)}}-d\sqrt{\frac{gh}{2b(b+d)}}$$

$$v_{0y}=(2b+d)\sqrt{\frac{gh}{2b(b+d)}}$$

• Problema 14

Un cuerpo se desliza sin roce sobre un plano inclinado en forma de cuña que forma un ángulo α con la horizontal. Desde la base de la cuña, de ancho D, se impulsa el objeto cuesta arriba por la pendiente del plano, en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuál es la velocidad inicial máxima que puede imprimirse al objeto para que éste no caiga por el costado de la cuña antes de alcanzar el piso nuevamente?



Descomponemos $\vec{g}$ en una componente perpendicular y otra paralela al plano inclinado. Luego, las ecuaciones que rigen al cuerpo son

$$x'=v\cos(\theta)\,t$$

$$y'=v\sin(\theta)\,t-\frac{1}{2}g\sin(\alpha)\,t^2$$

$$v_{y'}=v\sin(\theta)-g\sin(\alpha)\,t$$

El alcance horizontal máximo es D, luego obtenemos el tiempo de vuelo máximo

$$D=v\cos(\theta)\,t$$

$$t=\frac{D}{v\cos(\theta)}$$

Además de la ecuación para y' podemos obtener t imponiendo $y' = 0$

$$t = \frac{2v\sin(\theta)}{g\sin(\alpha)}$$

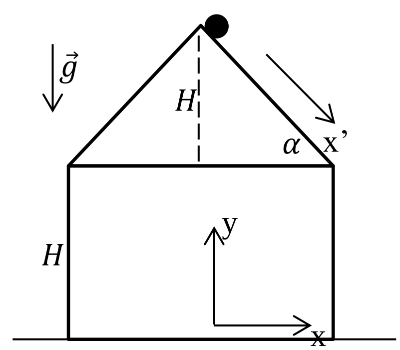
Igualando ambas

$$\frac{D}{v\cos(\theta)} = \frac{2v\sin(\theta)}{g\sin(\alpha)}$$

$$gD\sin(\alpha) = 2v^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$v = \sqrt{\frac{gD\sin(\alpha)}{\sin(2\theta)}}$$

• Problema 15



Una pelota se desliza sobre el techo liso de una casa. La inclinación del techo es de α con respecto a la horizontal. La pelota parte del reposo desde el punto más alto del techo, a una altura $2H$ sobre el suelo donde H es la altura de las murallas de la casa.
1) Determine la velocidad de la pelota al momento de desprenderse del techo.
2) ¿Cuánto se demora la pelota desde que se desprende del techo hasta que llega al piso?
3) ¿A qué distancia de la muralla la pelota impactará el piso?

1) En la primera etapa del movimiento, descomponemos $\vec{g}$, luego

$$x' = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)\,t^2$$

Para $x' = \frac{H}{\sin(\alpha)}$, obtenemos

$$t = \frac{1}{\sin(\alpha)}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Luego

$$v_{x'} = g\sin(\alpha)\,t = g\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}$$

De ahora en adelante, las ecuaciones que rigen el movimiento son

$$x = v_{x'}\cos(\alpha)\,t = \sqrt{2gH}\cos(\alpha)\,t$$

$$y = H - v_{x'}\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \sqrt{2gH}\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

2) Para obtener el tiempo de vuelo, basta imponer $y = 0$

$$H - \sqrt{2gH}\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

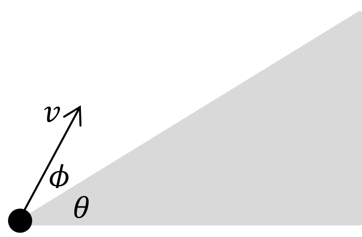
$$t = \frac{\sqrt{2gH}\sin(\alpha) \pm \sqrt{2gH\sin^2(\alpha) + 2gH}}{-g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{\sin^2(\alpha) + 1} - \sin(\alpha)\right)$$

3) Finalmente, la distancia en la que impactará el suelo es

$$x = \sqrt{2gH}\cos(\alpha)\,t = \sqrt{2gH}\cos(\alpha)\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sqrt{\sin^2(\alpha) + 1} - \sin(\alpha)\right)$$

$$x = 2H\cos(\alpha)\left(\sqrt{\sin^2(\alpha) + 1} - \sin(\alpha)\right)$$

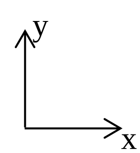
• Problema 16



Una pelota es pateada con velocidad inicial v_0 y ángulo ϕ desde el inicio de una rampa infinita de ángulo característico θ.
1) Calcule el alcance de la pelota sobre la rampa.
2) Calcule el ángulo ϕ en función de θ para el cual el alcance es máximo. Hint: Use identidades trigonométricas que impliquen ángulos dobles.

1) Presentamos dos formas de hacer el problema

Solución 1: Manteniendo ejes coordenados



La posición de la pelota en cada eje está dada por

$$x = v\cos(\phi + \theta)\,t$$

$$y = v\sin(\phi + \theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

Además la rampa impone que la posición donde impacta la pelota sea $y = x\ \tan(\theta)$. Reemplazando esto y despejando el tiempo de la ecuación para x tenemos

$$t = \frac{x}{v\cos(\phi + \theta)}$$

$$x\tan(\theta) = v\sin(\phi + \theta)\frac{x}{v\cos(\phi + \theta)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos(\phi + \theta)}\right)^2$$

Como buscamos una solución no nula, eliminamos la solución $x = 0$

$$\tan(\theta) = \frac{v\sin(\phi + \theta)}{v\cos(\phi + \theta)} - \frac{1}{2}g\frac{x}{(v\cos(\phi + \theta))^2}$$

de donde despejamos

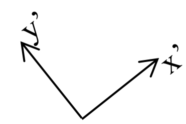
$$x = \frac{2v^2}{g} \cos^2(\phi + \theta) \left[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)\right]$$

Luego, el alcance es

$$R = \frac{x}{\cos(\theta)} = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos^2(\phi + \theta)}{\cos(\theta)} \ \left[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)\right]$$

<u>Solución 2</u>: Un sistema de referencia con coordenada paralela y perpendicular a la rampa

En este caso las ecuaciones son



$$x' = v \cos(\phi) t - \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2$$

$$y' = v \sin(\phi) t - \frac{1}{2} g \cos(\theta) t^2$$

En el momento del impacto se cumple que $y' = 0$. De la ecuación para esta componente obtenemos el tiempo de vuelo

$$t = \frac{2v \sin(\phi)}{g \cos(\theta)}$$

Reemplazando en la ecuación para x'

$$x' = v \cos(\phi) \frac{2v \sin(\phi)}{g \cos(\theta)} - \frac{1}{2} g \sin(\theta) \left(\frac{2v \sin(\phi)}{g \cos(\theta)}\right)^2$$

$$x' = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos(\phi) \sin(\phi) - \tan(\theta) \sin^2(\phi)}{\cos(\theta)}$$

Demostremos que ambas soluciones son equivalentes. En la primera solución obtenida utilizaremos la identidad trigonométrica

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$$

Obteniéndose

$$R = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos^2(\phi + \theta)}{\cos(\theta)} \ \left[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)\right] = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos^2(\phi + \theta)}{\cos(\theta)} \ \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi + \theta) \cos(\theta)}$$

$$R = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos(\phi + \theta) \sin(\phi)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2v^2}{g} \frac{(\cos(\phi) \cos(\theta) - \sin(\phi) \sin(\theta)) \sin(\phi)}{\cos^2(\theta)}$$

$$R = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos(\phi) \sin(\phi) - \tan(\theta) \sin^2(\phi)}{\cos(\theta)}$$

2) Para la primera solución

$$R = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos^2(\phi + \theta)}{\cos(\theta)} \ \left[\tan(\phi + \theta) - \tan(\theta)\right]$$

$$R = \frac{2v^2}{g \cos^2(\theta)} \left[\cos(\phi + \theta) \sin(\phi + \theta) \cos(\theta) - \cos^2(\phi + \theta) \sin(\theta)\right]$$

Teniendo en cuenta que

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\ ,\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

obtenemos

$$R = \frac{2v^2}{g\cos^2(\theta)}\frac{1}{2}\left[\sin\big(2(\phi+\theta)\big)\cos(\theta) - \sin(\theta) - \sin(\theta)\cos\big(2(\phi+\theta)\big)\right]$$

Usando

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

tenemos

$$R = \frac{2v^2}{g\cos^2(\theta)}\frac{1}{2}[\sin(2(\phi+\theta)-\theta) - \sin(\theta)]$$

El alcance será máximo cuando $\sin(2\phi-\theta)$ sea máximo, así

$$2\phi - \theta = 90$$

$$\phi = 45 - \frac{\theta}{2}$$

Para la segunda solución

$$x' = \frac{2v^2}{g}\frac{\cos(\phi)\sin(\phi) - \tan(\theta)\sin^2(\phi)}{\cos(\theta)} = \frac{2v^2}{g\cos^2(\theta)}(\cos(\phi)\sin(\phi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin^2(\phi))$$

$$x' = \frac{2v^2}{g\cos^2(\theta)}\sin(\phi)(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)) = \frac{2v^2}{g\cos^2(\theta)}\sin(\phi)\cos(\phi+\theta)$$

Llevaremos el término $\sin(\phi)\cos(\phi+\theta)$ a una expresión de la forma $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Resolviendo el sistema que se genera: $\alpha = 2\phi+\theta$ y $\beta = \theta$. Con esto, utilizamos la propiedad

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha) - \sin(\beta)) = \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Luego

$$x' = \frac{v^2}{g\cos^2(\theta)}(\sin(2\phi+\theta) + \sin(\theta))$$

obteniéndose el mismo resultado anterior.

Si $\theta = 0°$, es decir, se lanza la pelota sobre una superficie horizontal, obtenemos que el alcance es máximo para $\phi = 45°$, que es lo que se cumple en ausencia de roce con el aire.

• Problema 17: Ejercicio recuperativo, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones

Al mediodía, el minutero y horario del reloj coinciden, luego el minutero se adelanta al horario hasta que vuelven a coincidir. ¿A qué hora ocurre esto?

Las ecuaciones vistas en cinemática pueden ser extendidas para el caso de ángulos, es decir,

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

En el caso de las manecillas de un reloj, estas se mueven con rapidez angular constante, la que determinaremos usando la expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

De esta forma, obtenemos

$$\omega_{horario} = \frac{2\pi}{12\ [horas]} = \frac{2\pi}{43200}[s^{-1}]$$

$$\omega_{minutero} = \frac{2\pi}{1\ [hora]} = \frac{2\pi}{3600}[s^{-1}]$$

Las ecuaciones angulares para cada manecilla para el caso del movimiento empezado a las 12 horas

$$\theta_h = \omega_h t \qquad \theta_m = \omega_m t$$

Para que se reencuentren las manecillas se debe cumplir que el minutero realice más de una vuelta completa, por lo que se tiene

$$\theta_h + 2\pi = \theta_m$$

y ocupando las ecuaciones anteriormente obtenidas

$$\omega_h t + 2\pi = \omega_m t$$

De aquí obtenemos

$$t = \frac{2\pi}{\omega_m - \omega_h} = \frac{1}{\frac{1}{3600} - \frac{1}{43200}} = \frac{43200}{11} = 3927[s]$$

Transformando a horas, minutos y segundos

$$t = 1\ hora\ 5\ minutos\ y\ 27\ segundos$$

• Problema 18

Un tarro de radio R que gira en torno a su eje de simetría es impactado diametralmente por una bala de rapidez v. Determine la rapidez angular mínima para que el tarro sufra solo una perforación.

Para la bala se cumple

$$x = vt$$

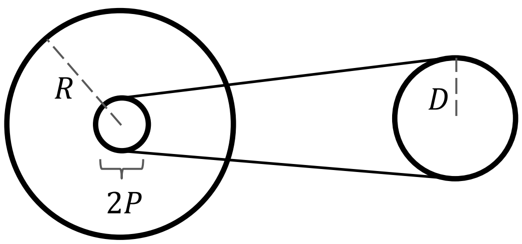
La distancia a recorrer es $2R$ y con esto obtenemos el tiempo que demora la bala en atravesar el tarro.

$$t = \frac{2R}{v}$$

En este tiempo el agujero provocado al ingresar la bala debe describir un ángulo de 180°, así

$$\omega = \frac{\pi}{t} = \frac{\pi v}{2R}$$

• Problema 19: Autoría de Rodrigo Sabaj



Florencia, destacada ciclista de la universidad, circula en su bicicleta caracterizada por ruedas de radio R. La cadena está colocada a una distancia P del centro del piñón, asociado a la rueda trasera y a una distancia D del eje del motor, en el cual están unidos las bielas y los pedales. Si la bicicleta avanza sin resbalar, es decir, cuando la rueda da una vuelta, el centro de esta avanzó una distancia $2\pi R$, ¿con qué frecuencia debe pedalear Florencia para avanzar con su bicicleta a una velocidad v?

Sea T el periodo de rotación de las ruedas de la bicicleta para que esta avance con velocidad v. Como la bicicleta no resbala, se cumple

$$vT = 2\pi R$$

de donde despejamos

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

La velocidad angular de la rueda trasera es, por definición

$$\omega_R = \frac{2\pi}{T}$$

y reemplazando lo obtenido

$$\omega_R = \frac{v}{R}$$

El piñón gira solidariamente con la rueda trasera por lo que tienen la misma velocidad angular. De esta forma, la velocidad con que se mueve la cadena es la velocidad lineal del piñón a la distancia señalada.

$$v_C = \omega_R P = \frac{v}{R} P$$

Las cadenas transmiten velocidad lineal, por lo que se cumple

$$v_C = \omega_{eje} D$$

$$\omega_{eje} = \frac{v_C}{D} = \frac{vP}{RD}$$

Finalmente, usamos la relación

$$2\pi f = \omega$$

Así, la frecuencia de pedaleo es

$$f = \frac{\omega_{eje}}{2\pi} = \frac{vP}{2\pi RD}$$

• Problema 20: Ej 3, semestre otoño 2013, Prof. Claudio Romero. Autoría de Rodrigo Sabaj.

Considere un velódromo circular de radio R en el cual se desarrolla una competencia ciclística por alcance. Los competidores parten diametralmente opuestos y con rapidez constante v_A y v_B respectivamente, girando en el mismo sentido. ($v_A > v_B$) El radio de las ruedas es r.
1) Calcule el tiempo que demora el ciclista A en alcanzar al ciclista B.
2) En el instante en que A alcanza a B, el ciclista B acelera, variando su rapidez tangencial uniformemente, hasta alcanzar a A (es decir, primero recupera al separación original y luego lo alcanza) demorándose el mismo tiempo que demoró A en alcanzar a B. Determine el módulo del vector aceleración del ciclista B cuando alcanza a A.

Tomando como referencia al ciclista A, se tiene

$$S_A = v_A t$$

$$S_B = \pi R + v_B t$$

Igualando las posiciones

$$v_A t' = v_B t' + \pi R$$

$$t' = \frac{\pi R}{v_A - v_B}$$

Cuando B es alcanzado, las nuevas ecuaciones que rigen el movimiento son

$$S_A = v_A t$$

$$S_B = v_B t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

Como B debe sacarle una vuelta a A, es decir, recorre una distancia $2\pi R$ más que A y, además, demora el mismo tiempo, se tiene

$$S_B(t') - S_A(t') = 2\pi R$$

$$v_B t' + \frac{1}{2} a_T t'^2 - v_A t' = 2\pi R$$

Ordenando y reemplazando t_0

$$(v_B - v_A)t' + \frac{1}{2} a_T t'^2 = 2\pi R$$

$$(v_B - v_A)\left(\frac{\pi R}{v_A - v_B}\right) + \frac{1}{2}a_T\left(\frac{\pi R}{v_A - v_B}\right)^2 = 2\pi R$$

$$\frac{1}{2}a_T\left(\frac{\pi R}{v_A - v_B}\right)^2 = 3\pi R$$

$$a_T = \frac{6(v_A - v_B)^2}{\pi R}$$

La velocidad de B en el nuevo alcance es

$$v_B' = v_B + a_T t'$$

$$v_B' = v_B + \frac{6(v_A - v_B)^2}{\pi R}\frac{\pi R}{v_A - v_B}$$

$$v_B' = 6v_A - 5v_B$$

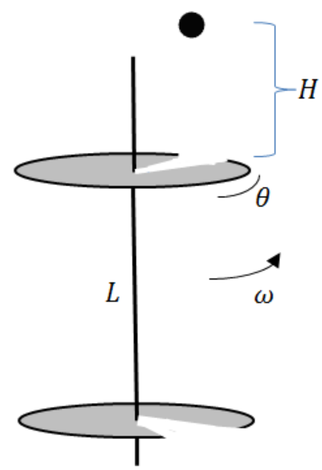
Así, la aceleración centrípeta en el alcance es

$$a_C = \frac{{v_B}'^2}{R} = \frac{(6v_A - 5v_B)^2}{R}$$

Luego, el módulo de la aceleración es

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_T}^2 + {a_C}^2} = \sqrt{\left(\frac{6(v_A - v_B)^2}{\pi R}\right)^2 + \left(\frac{(6v_A - 5v_B)^2}{R}\right)^2}$$

• Problema 21



Considere un eje vertical de largo L, en cuyos extremos hay dos discos sólidos provistos de ranuras. Las ranuras están desplazadas un cierto ángulo θ entre sí. El sistema gira con una velocidad angular ω constante. Calcule la altura H por sobre el disco superior, desde la cual se debe soltar una bolita para que ésta, en caída libre, pase por ambas ranuras.

Tomando como origen del sistema de referencia el disco superior, la ecuación de la bolita es

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = -gt$$

Con esto, calculamos la velocidad de la bolita cuando atraviesa el primer disco.

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$v_y = -\sqrt{2gH}$$

Ahora, calculamos el tiempo que se demora en llegar al segundo disco.

$$y = v_y t_2 - \frac{1}{2} g {t_2}^2$$

$$-L = -\sqrt{2gH} t_2 - \frac{1}{2} g\, {t_2}^2$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH + 2gL}}{-g}$$

Donde debemos elegir la solución positiva

$$t_2 = \frac{\sqrt{2gH + 2gL} - \sqrt{2gH}}{g}$$

En este tiempo se debe cumplir

$$\theta = \omega t_2$$

$$t_2 = \frac{\theta}{\omega}$$

Igualando

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{\sqrt{2gH + 2gL} - \sqrt{2gH}}{g}$$

$$2gH + 2gH + 2gL - 2\sqrt{2gH}\sqrt{2gH + 2gL} = \left(\frac{\theta g}{\omega}\right)^2$$

$$4H + 2L - g\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 4\sqrt{H}\sqrt{H + L}$$

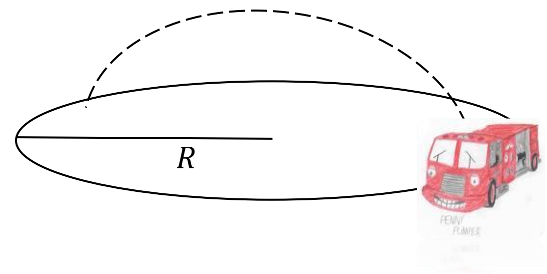
$$16H^2 + 16HL + 4L^2 + g^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^4 - 8g\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 H - 4gL\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 16H^2 + 16HL$$

$$4L^2 - 4gL\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 + g^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^4 = H8g\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2$$

$$H = \frac{\left(g\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 2L\right)^2}{8g\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{\left(g\frac{\theta}{\omega} - 2L\frac{\omega}{\theta}\right)^2}{8g}$$

• Problema 22: Ejercicio 3, semestre otoño 2009, Prof. Álvaro Núñez

En medio de un caluroso día, un carro de bomberos circula con rapidez v en una rotonda de radio R. A los bomberos se les ocurre lanzar un chorro de agua de tal forma que puedan recibirlo en el lado diametralmente opuesto de donde este abandonó la manguera. Determine la velocidad con que los bomberos deben lanzar el agua desde el carro.



Las ecuaciones de movimiento del chorro son

$$x = v_x t$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

El tiempo que tiene el chorro para describir su movimiento es el tiempo que demora el carro de bomberos en describir media circunferencia

$$\pi R = vt$$

$$t = \frac{\pi R}{v}$$

El alcance del chorro debe ser $2R$, así

$$2R = v_x \frac{\pi R}{v}$$

$$0 = v_y \frac{\pi R}{v} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\pi R}{v}\right)^2$$

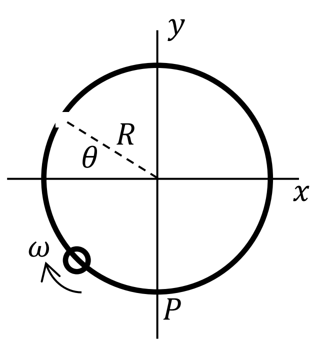
Notar que estos cálculos para el chorro se hacen suponiendo que el carro de bomberos está en reposo. Para que surja efecto la idea de los bomberos, se le debe agregar una tercera componente en la velocidad, en la misma dirección y opuesta a la velocidad del carro, así la velocidad del chorro es

$$\vec{v} = \frac{2v}{\pi} \hat{\imath} + \frac{g\pi R}{2v} \hat{\jmath} - v\hat{k}$$

• Problema 23: Pregunta 3, control 1, semestre otoño 2012

Un anillo muy pequeño se logra hacer girar con velocidad angular constante ω a lo largo de una circunferencia vertical de radio$R$. La circunferencia está cortada en un punto determinado por un ángulo $\theta = 30°$, como se señala en la figura. Al alcanzar este punto, el anillo se desprende y continúa en caída libre.

1) Calcule el valor de la velocidad angular ω si el anillo, luego de desprenderse, toca a la circunferencia precisamente en su punto más bajo P.

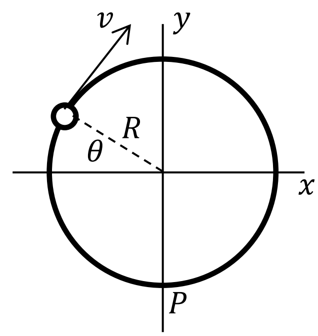


2) Para el caso anterior indique el valor de la rapidez del anillo y su dirección cuando cruza el diámetro de la circunferencia. (eje x)

1) En primer lugar, se debe notar que la rapidez lineal del anillo es $v = \omega R$. Utilizando el sistema de coordenadas que sugiere la figura tenemos

$$x = -R\cos(\theta) + \omega R t \sin(\theta)$$

$$y = R\sin(\theta) + \omega R t\cos(\theta) - \tfrac{1}{2}gt^2$$



Dado que $\theta = 30°$, reducimos las dos ecuaciones a

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}\ \omega R t$$

$$y = \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega R t - \frac{1}{2}gt^2$$

Imponiendo las coordenadas del punto P

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}\ \omega R t$$

$$-R = \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega R t - \frac{1}{2}gt^2$$

De la ecuación en el eje horizontal despejamos el tiempo

$$t = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$$

Luego, en la ecuación ya simplificada del eje vertical

$$-2 = 1 + \sqrt{3}\omega t - \frac{g}{R}\ t^2$$

$$0 = 3 + \sqrt{3}\omega\frac{\sqrt{3}}{\omega} - \frac{g}{R}\frac{3}{\omega^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

2) En el movimiento parabólico solo la velocidad en el eje horizontal no varía. Así

$$v_x = \omega R\sin(\theta) = \sqrt{\frac{gR}{8}}$$

En el eje vertical, dado que conocemos la distancia recorrida, usamos la ecuación

$$v_f^2 = 2g\Delta y + v_i^2$$

que en este caso se transforma a

$$v_f^2 = 2gR\sin(\theta) + (\omega R\cos(\theta))^2$$

Reemplazando los valores

$$v_f^2 = gR + \left(\sqrt{\frac{g}{2R}}R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{11}{8}gR$$

$$v_f = -\sqrt{\frac{11}{8}gR}$$

donde se ha elegido la solución negativa pues el anillo va descendiendo.

El módulo de la velocidad queda dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{gR}{8} + \frac{11}{8}gR} = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$$

La dirección, ángulo que forma el vector con el eje horizontal, es

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(-\sqrt{\frac{11}{8}gR}\sqrt{\frac{8}{gR}}\right) = \arctan\left(-\sqrt{11}\right)$$

Unidad 2

Dinámica

• Problema 1

Un pasajero posa sobre una balanza dentro de un ascensor. El pasajero observa que la balanza registra una carga igual a un 70% de su peso. Si el ascensor es de masa M y el pasajero de masa m, calcule la tensión del cable que tira el ascensor y compárela con la que se produciría si el ascensor acelera en la misma razón pero en sentido opuesto.

Debemos notar que la balanza registra la fuerza normal entre esta y el pasajero.
La ecuación para la persona es

$$N - mg = ma_P$$

pero sabemos cuánto vale la normal

$$0{,}7mg - mg = ma_P$$

$$a_P = -0{,}3g$$

La ecuación para el ascensor es

$$T - Mg - N = Ma_A$$

donde hemos utilizado la 3ra ley de Newton para colocar la normal en la ecuación dinámica. Además la aceleración del pasajero y del ascensor es la misma, por lo que el ascensor va descendiendo. La tensión es

$$T = Ma_A + Mg + N = 0{,}7(m + M)g$$

Si el ascensor asciende, para la persona tenemos

$$N = m(g + a_P) = 1{,}3mg$$

y para el ascensor

$$T = N + Ma_A = 1{,}3(m + M)g$$

Los resultados son lógicos. Si el ascensor no acelerara la tensión valdría $(m + M)g$. Al descender, el peso tiene que ser mayor que la tensión y al ascender, la tensión tiene que ser mayor que el peso.

• Problema 2

Considere un péndulo cónico, consistente en una cuerda de largo l con una masa puntual m en su extremo. La cuerda forma un ángulo α con la vertical y la masa describe un movimiento circunferencial uniforme. ¿Cuál es la velocidad angular de este movimiento?

Descomponiendo la tensión en sus componentes vertical y horizontal resultan las siguientes ecuaciones de movimiento

$$T\cos(\alpha) - mg = ma_y$$

$$T\sin(\alpha) = ma_x$$

En el eje vertical la masa no acelera, mientras que en el eje horizontal, la aceleración es la centrípeta

$$T\cos(\alpha) = mg$$

$$T\sin(\alpha) = m\omega^2 l \sin(\alpha)$$

Despejando la tensión de la primera y reemplazando en la segunda

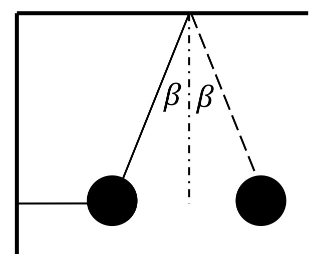
$$T = \frac{mg}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{mg}{\cos(\alpha)} = m\omega^2 l$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos(\alpha)}}$$

• Problema 3

Una bola se sostiene por dos hilos, como se muestra en la figura. Si se corta el hilo horizontal, la bola oscilará, llegando a un punto de altura máxima. ¿Qué relación hay entre la tensión del hilo en ese punto y la tensión antes de ser cortado el hilo horizontal?



Sea T_h la tensión del hilo horizontal y T la tensión del hilo que no se corta. Las ecuaciones de movimiento para la masa antes de cortase el hilo son

$$T\cos\beta - mg = 0$$

$$T\sin\beta - T_h = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$T = \frac{mg}{\cos\beta}$$

En el punto de altura máxima, se cumple

$$T' - mg\cos\beta = 0$$

Luego, la relación solicitada es

$$\frac{T'}{T} = \frac{mg\cos\beta}{\frac{mg}{\cos\beta}} = \cos^2\beta$$

Un error común es señalar que

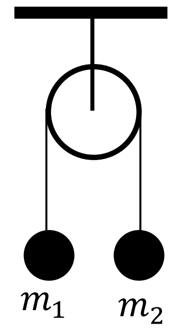
$$T'\cos\beta - mg = 0$$

Lo cual es erróneo, pues existe una aceleración que es perpendicular a la tensión, dada por

$$a_t = mg\sin(\beta)$$

• Problema 4

1) Considere una máquina ideal de Atwood simple, consistente en una polea sin roce ni masa por la cual pasa una cuerda ideal en cuyos extremos tiene masas m_1 y m_2. Determine la aceleración de dichas masas y la tensión de la cuerda.



Las ecuaciones de movimiento para cada masa son

$$T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

Dado que la cuerda es inextensible

$$a_1 = -a_2 = a$$

Así

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

Igualando las tensiones

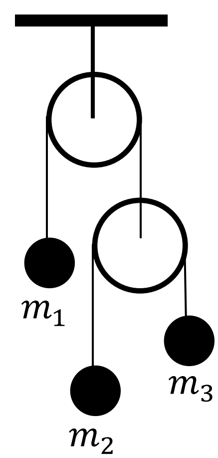
$$m_1 a + m_1 g = m_2 g - m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Luego, la tensión es

$$T = m_1(g + a) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

2) Considere una máquina de atwood doble como se muestra en la figura. Determine la aceleración de cada una de las masas.



Sean T_1 y T_2 las tensiones de las cuerdas sobre las masas 1 y 2, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento para cada masa son

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a_3$$

Sobre la polea móvil se tiene

$$T_1 - 2T_2 = 0$$

Dado que se tienen 4 ecuaciones y 5 incógnitas, no se puede resolver el sistema. Para poder resolverlo se debe obtener una relación entre las aceleraciones. Dado que la polea móvil tiene la misma aceleración que la masa 1 y que la polea se mueve solidariamente con el punto medio de las masas 2 y 3 (si la polea estuviese fija, el punto medio entre ambas masas es constante), se tiene

$$a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2}$$

Luego, las ecuaciones quedan

$$2T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = -m_2(2a_1 + a_3)$$

$$T - m_3 g = m_3 a_3$$

De la tercera ecuación

$$T = m_3 g + m_3 a_3$$

Despejando $a_1$de la primera

$$a_1 = \frac{2T}{m_1} - g = 2\frac{m_3 g + m_3 a_3}{m_1} - g$$

Reemplazando en la segunda

$$m_3 g + m_3 a_3 - m_2 g = -m_2\left(4\frac{m_3 g + m_3 a_3}{m_1} - 2g + a_3\right)$$

$$a_3(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3) = -m_2 g(4m_3 - 2m_1) - m_1 m_3 g + m_1 m_2 g$$

$$a_3 = -g\frac{4m_2 m_3 - m_1(3m_2 - m_3)}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}$$

Luego

$$a_1 = \frac{2m_3}{m_1}\left(g - g\frac{4m_2 m_3 - 3m_1 m_2 + m_1 m_3}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}\right) - g$$

$$a_1 = g\left(\frac{8m_2 m_3}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)} - 1\right)$$

$$a_1 = g\frac{4m_2 m_3 - m_1(m_3 + m_2)}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}$$

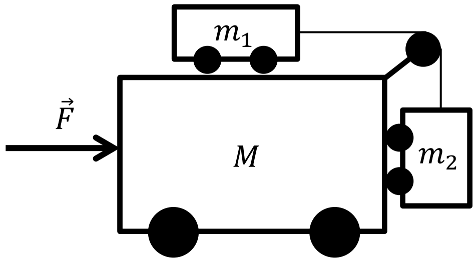
Y

$$a_2 = -2a_1 - a_3 = g\frac{4m_2 m_3 - m_1(3m_2 - m_3)}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)} - 2g\frac{4m_2 m_3 - m_1(m_3 + m_2)}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}$$

$$a_2 = -g\frac{4m_2 m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{(m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}$$

Podemos verificar los resultados comprobando el caso $m_1 = 2m_2 = 2m_3$, donde todas las aceleraciones son 0. Además, si $m_3 \ll m_1, m_2$, se tiene que $a_1 = a_2 - g$ y $a_3 = 3g$, lo cual es correcto, pues para que 1 y 2 bajen una distancia x, 3 debe subir $3x$, pues para que 2 baje x, en su polea debe bajar $2x$, así 3 sube $2x$ en su polea más x que sube su polea por el descenso de 1 en x.

• Problema 5: Pregunta 1, examen otoño 2011



Considere el carro de masa M indicado en la figura. Sobre dicho carro se sitúan dos carros de masa m_1 y m_2. Despreciando el efecto de las fuerzas de roce en cada una de las superficies de contacto, determine el valor de la fuerza F que es preciso aplicar en la dirección horizontal para lograr que el carro m_2 no suba ni baje.

Las ecuaciones de movimiento para los carros son

$$N_2 = m_2 a_{2x}$$

$$T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$T = m_1 a_{1x}$$

$$N_1 - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0$$

Para que el carro m_2 no suba ni baje su aceleración en el eje Y debe ser nula y su aceleración en el eje X debe ser la misma que la del carro m_1 y el carro M, la cual llamaremos simplemente a. Esta es la aceleración del sistema, provocada por la única fuerza externa actuante en el eje X:

$$F = (M + m_1 + m_2)a$$

Las ecuaciones relevantes para nuestro problemas quedan dadas por

$$N_2 = m_2 a$$

$$T = m_2 g$$

$$T = m_1 a$$

De las dos últimas obtenemos el valor de a

$$a = \frac{m_2}{m_1} g$$

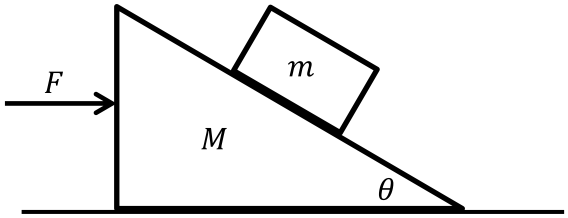
que reemplazamos para determinar F

$$F = (M + m_1 + m_2)\frac{m_2}{m_1} g$$

• Problema 6: Ejercicio 5, año 2004, Prof. Andrés Meza.

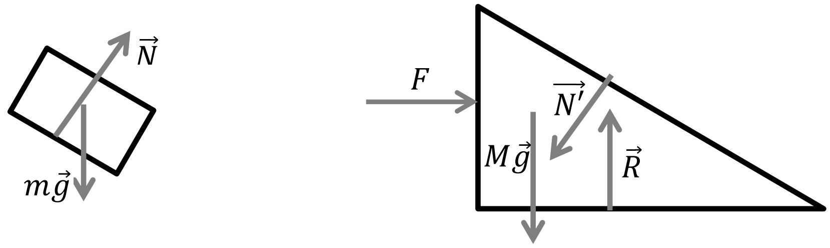
1) Un bloque de masa m descanza sobre la superficie sin roce de una cuña de masa M que, a su vez, puede deslizar sin roce sobre el suelo. Encuentre la fuerza horizontal F que se debe aplicar para que el bloque m no deslice por el plano inclinado.

2) Si ahora suponemos que existe roce entre la cuña y



el suelo, ¿Cuál es la fuerza F que tenemos que aplicar para que el bloque m no deslice?

Los DCLs de los cuerpos son



Debemos notar que el ángulo que forma la normal con la vertical es θ. A partir de esto las ecuaciones de movimiento para el bloque son

$$N\sin(\theta) = ma_X$$

$$N\cos(\theta) - mg = ma_Y$$

y para la cuña son

$$F - N'\sin(\theta) = Ma'_X$$

$$R - N'\cos(\theta) - Mg = Ma_{\prime Y} = 0$$

La condición para que el bloque no resbale es que su aceleración en el eje Y sea nula mientras que en el eje X sea la misma que la cuña: $a_X = a'_X$. Obteniendo la normal de la ecuación en el eje Y y reemplazándola en la ecuación del eje X, obtenemos

$$N\cos(\theta) = mg$$

$$N = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

Luego

$$N\sin(\theta) = ma_X$$

$$ma_X = mg\tan(\theta)$$

$$a_X = g\tan(\theta)$$

Reemplazando en la primera ecuación de movimiento para la cuña el valor de la normal y de la aceleración, obtenemos el valor de la fuerza

$$F - mg\tan(\theta) = Mg\tan(\theta)$$

$$F = (M+m)g\tan(\theta)$$

2) La única ecuación que se modifica es la ecuación de movimiento de la cuña en el eje x, la cual queda

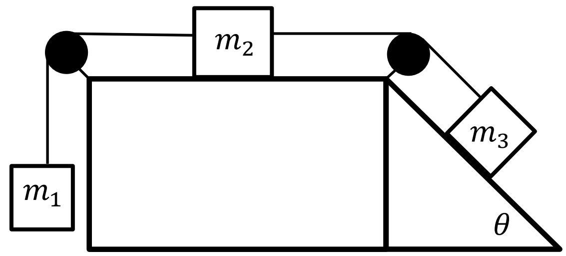
$$F - N'\sin(\theta) - F_{roce} = Ma'_X$$

Como se cumple la igualdad $F_{roce} = \mu R$, despejamos la fuerza necesaria

$$F = (M+m)g\tan(\theta) + \mu R = (M+m)g\tan(\theta) + \mu(m+M)g$$

$$F = (M + m)g(\tan(\theta) + \mu)$$

• Problema 7: Pregunta 2, control recuperativo, semestre otoño 2009.



Los tres bloques de la figura están conectados por medio de cuerdas sin masa que pasan por poleas sin fricción. La aceleración de la masa m_2 es de magnitud a hacia la izquierda y las superficies son rugosas. Determine:

a) Las tensiones en las cuerdas.

b) El coeficiente de fricción cinética entre los bloques y las superficies (Suponga el mismo coeficiente para ambos bloques).

Como el sistema se mueve solidariamente, los 3 bloques tienen la misma aceleración. Así, las ecuaciones en los ejes en que se mueven los bloques son

$$T_1 - m_1 g = -m_1 a$$

$$T_2 - T_1 + F_{roce} = -m_2 a$$

$$F'_{roce} - T_2 + m_3 g \sin\theta = -m_3 a$$

Estableciendo la igualdad $f_{roce} = \mu N$

$$T_1 - m_1 g = -m_1 a \ (1)$$

$$T_2 - T_1 + \mu m_2 g = -m_2 a \ (2)$$

$$\mu m_3 g \cos\theta - T_2 + m_3 g \sin\theta = -m_3 a \ (3)$$

La tensión de la primera cuerda es fácil de obtener con la ecuación (1)

$$T_1 = m_1(g - a)$$

Sumando (2) y (3)

$$\mu m_3 g \cos\theta - T_1 + \mu m_2 g + m_3 g \sin\theta = -m_3 a - m_2 a$$

$$\mu m_3 g \cos\theta - m_1 g + m_1 a + \mu m_2 g + m_3 g \sin\theta = -m_3 a - m_2 a$$

$$\mu = \frac{m_1 g - a(m_1 + m_2 + m_3) - m_3 g \sin\theta}{m_3 g \cos\theta + m_2 g}$$

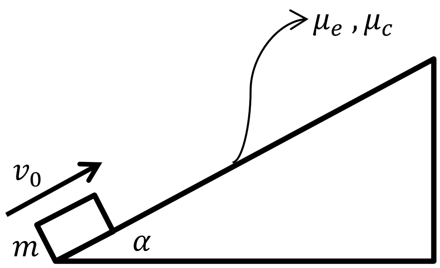
Reemplazando μ en (3)

$$T_2 = m_3(\mu g \cos\theta + g \sin\theta + a)$$

$$T_2 = m_3\left(\frac{m_1 g - a(m_1 + m_2 + m_3) - m_3 g \sin\theta}{m_3 \cos\theta + m_2} \cos\theta + g \sin\theta + a\right)$$

$$T_2 = m_3 \frac{m_1(g - a)\cos\theta - m_2(a\cos\theta - g\sin\theta - a)}{m_3 \cos\theta + m_2}$$

- Problema 8: Ejercicio 5, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones.



Un bloque de masa m sube por un plano inclinado cuyo ángulo de elevación es α. Los coeficientes de roce estático y cinético sobre la masa m y el plano son μ_e y μ_c, respectivamente.

1) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el bloque si parte con velocidad v_0 desde la base del plano?

2) ¿Qué condición debe satisfacerse para que el bloque vuelva a descender?

3) En caso de cumplirse la condición anterior, ¿con qué velocidad llegará a la base del plano inclinado?

1) La ecuación de movimiento para el bloque es

$$-mg\sin\alpha - F_{roce\ dinámico} = -ma$$

En este caso se cumple que

$$F_{roce\ dinámico} = \mu_c N = \mu_c mg\cos\alpha$$

por lo que la aceleración del bloque es

$$a = g(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)$$

Luego, las ecuaciones cinemáticas del bloque son

$$x = v_o t - \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_o - at$$

Como la rapidez final del bloque es nula, el tiempo en que se demora en llegar a su altura máxima es

$$t = \frac{v_0}{a}$$

que reemplazamos en la ecuación para la posición, obteniéndose

$$x = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)}$$

2) Para que el bloque descienda se debe cumplir que el roce sea menor a la componente del peso paralela a la cuña, o sea,

$$mg\sin\alpha > F_{roce\ estático} = \mu_e mg\cos\alpha$$

o de forma equivalente

$$\tan\alpha > \mu_e$$

3) La nueva ecuación de movimiento del bloque es

$$-mg\sin\alpha + F_{roce\ dinámico} = -ma'$$

luego

$$a' = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

Las ecuaciones cinemáticas ahora serán

$$x = x_0 - \frac{1}{2}a't^2 = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{1}{2}a't^2$$

$$v = -a't$$

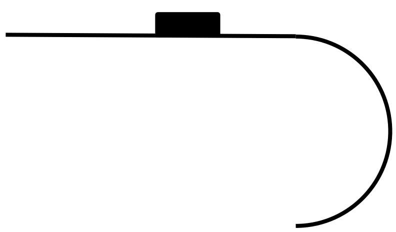
Al llegar al suelo, su posición será $x = 0$, por lo que el tiempo de bajada es

$$t = \sqrt{\frac{v_0^2}{a\,a'}}$$

y la velocidad de llegada será

$$|v| = a'\sqrt{\frac{v_0^2}{a\,a'}} = v_0\sqrt{\frac{g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)}{g(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)}} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha}}$$

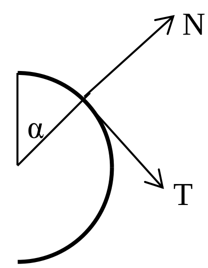
• Problema 9: Pregunta 3, control recuperativo, semestre otoño 2011.



Una caja pequeña posa sin resbalar sobre el pasamanos de un pasillo transportador mecánico. El coeficiente de roce estático entre el pasamanos y la caja es μ y la velocidad del pasillo es v_0. El extremo superior del pasamanos termina en forma semicircular de radio R. Al llegar la caja al tramo semicircular esta se desprende de la superficie y cae.

1) Determine el punto de desprendimiento de la casa, suponiendo que esta nunca desliza.

2) Determine el punto de impacto de la caja en el piso.



1) Tomando el eje coordenado de la figura tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

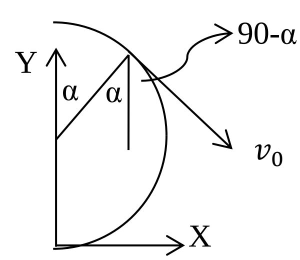
$$\text{Para N: } N - mgcos(\alpha) = ma_N$$

$$\text{Para T: } mgsin(\alpha) - F_{roce} = ma_T$$

Al describir una circunferencia, el bloque presenta una aceleración centrípeta en el eje normal y como se mueve con rapidez constante, en el eje tangencial no hay aceleración, por lo que las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma

$$N - mg\cos(\alpha) = -m\frac{{v_0}^2}{R}$$

$$mg\sin(\alpha) - F_{roce} = 0$$



La condición de despegue es que la normal se anule, de donde se obtiene

$$-mg\cos(\alpha) = -m\frac{{v_0}^2}{R}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{{v_0}^2}{gR}$$

2) Una vez que la normal se anula, el cuerpo queda solo bajo la acción de la gravedad, presentándose un movimiento parabólico, descrito por las siguientes ecuaciones, según el nuevo sistema de referencia mostrado en la figura:

$$x = R\sin(\alpha) + v_0\cos(\alpha)\,t$$

$$y = R(1+\cos(\alpha)) - v_0\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

De la ecuación para el eje Y calculamos el tiempo que se demora el bloque en llegar al suelo, donde elegimos la solución positiva

$$0 = R(1+\cos(\alpha)) - v_0\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{-v_0\sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2\sin^2(\alpha) + 2\,Rg(1+\cos(\alpha))}}{g}$$

Utilizando este tiempo de vuelo en la otra ecuación, obtenemos la distancia solicitada

$$x = Rsin(\alpha) + v_0\cos(\alpha)\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2(\alpha) + 2\,Rg(1+\cos(\alpha))} - v_0\sin(\alpha)}{g}$$

En esta expresión se cumple

$$\cos(\alpha) = \frac{v_o^2}{gR}$$

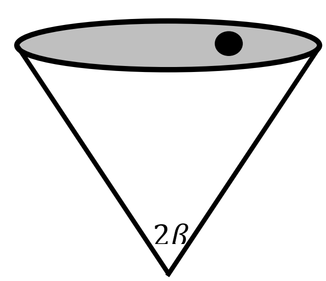
Para calcular $\sin(\alpha)$, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\left(\frac{v_o^2}{gR}\right)^2} = \frac{1}{gR}\sqrt{(gR)^2 - v_0^4}$$

• Problema 10:

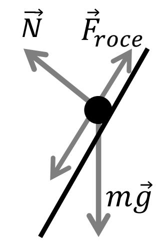
Un bloque pequeño de masa m se coloca dentro de un cono invertido cuyas paredes forman un ángulo β con la vertical y el cual gira de modo que el tiempo que demora cada revolución es T. Si el coeficiente de roce estático entre la masa y el cono es μ, determine los valores mínimo y máximo de T para que el bloque se mantenga a una altura h sobre el vértice.



Primero, calculamos el radio de la circunferencia que describe el bloque, el cual está dado por

$$R = h\tan(\beta)$$

Manteniendo el eje coordenado tenemos



$$eje\ x\colon\ -N\cos(\beta) \pm F_{roce}\sin(\beta) = -m\omega^2 R$$

$$eje\ y\colon N\sin(\beta) - mg \pm F_{roce}\cos(\beta) = 0$$

En los casos extremos se cumplirá la igualdad $F_{roce} = \mu N$, de esta forma

$$-N\cos(\beta) \pm \mu N\sin(\beta) = -m\omega^2 R$$

$$N\sin(\beta) - mg \pm \mu N\cos(\beta) = 0$$

El caso mínimo es cuando la fuerza de roce es positiva, es decir, evita que el cuerpo descienda en el cono.

$$-N\cos(\beta) + \mu N\sin(\beta) = -m\omega_{min}^2 R$$

$$N\sin(\beta) - mg + \mu N\cos(\beta) = 0$$

Despejando la normal en la segunda ecuación y reemplazando en la primera

$$N = \frac{mg}{\sin(\beta) + \mu\cos(\beta)}$$

$$\frac{mg}{\sin(\beta) + \mu\cos(\beta)}(\cos(\beta) - \mu\sin(\beta)) = m\omega_{min}^2 h\tan(\beta)$$

$$\omega_{min}^2 = \frac{g}{h\tan(\beta)}\frac{\cos(\beta) - \mu\sin(\beta)}{\sin(\beta) + \mu\cos(\beta)}$$

El caso máximo es cuando la fuerza de roce es negativa, es decir, evita que el cuerpo suba en el cono.

$$-N\cos(\beta) - \mu N\sin(\beta) = -m\omega_{max}^2 R$$

$$N\sin(\beta) - mg - \mu N\cos(\beta) = 0$$

Repitiendo el procedimiento

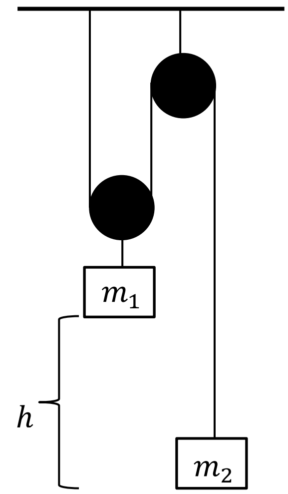
$$\omega_{max}^2 = \frac{g}{h\tan(\beta)}\frac{\cos(\beta) + \mu\sin(\beta)}{\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)}$$

Finalmente, los periodos mínimo y máximo se obtienen con la expresión

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{h\tan(\beta)}{g}\frac{\sin(\beta) + \mu\cos(\beta)}{\cos(\beta) - \mu\sin(\beta)}} \quad T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{h\tan(\beta)}{g}\frac{\sin(\beta) - \mu\cos(\beta)}{\cos(\beta) + \mu\sin(\beta)}}$$

• Problema 11



Considere el montaje mostrado en la figura. La masa del cuerpo 1 es n veces mayor que la del cuerpo 2. Suponga que las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento son despreciables por su pequeñez. Cuando el cuerpo 2 se suelta, la masa 1 se encuentra a una altura h.
1) ¿Cuál es la aceleración de la masa 2 mientras la masa 1 baja?
2) ¿Cuál es la altura máxima del suelo a la que subirá la masa 2?

1) Las ecuaciones de movimiento para los cuerpos son

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$
$$2T - m_1 g = -m_1 a_1$$

En el enunciado se señala que $m_1 = n m_2$ y por la configuración de las poleas $2a_1 = a_2$. Esto último se puede obtener haciendo el siguiente análisis: si el cuerpo 2 sube una distancia L, el cuerpo 1 desciende $\frac{L}{2}$ ya que la cuerda se divide equitativamente en cada lado de la polea que está unida al cuerpo 1. Luego

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$
$$2T - n m_2 g = -\frac{n m_2 a_2}{2}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda

$$(n m_2 - 2m_2) g = \left(2m_2 + \frac{n m_2}{2}\right) a_2$$
$$a_2 = \frac{2(n-2)}{n+4} g$$

2) Para calcular la altura máxima que alcanza debemos notar que el cuerpo 2 sigue ascendiendo una vez que el cuerpo 1 llega al suelo; cuando esto ocurre la tensión se anula y aquel sigue moviéndose sometido solo a su propio peso. En ese punto, donde la altura alcanzada por la masa 2 es el doble de lo que descendió la masa 1 (ver como se obtuvo la relación entre aceleraciones), la ecuación que lo rige es

$$y = 2h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v = v_0 - g t$$

Primero calculamos v_0 con la aceleración obtenida.

$$2h = \frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{n-2}{n+4} g t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2(n+4)h}{(n-2)g}}$$
$$v_0 = a_2 t = \frac{2(n-2)}{n+4} g \sqrt{\frac{2(n+4)h}{(n-2)g}} = 2\sqrt{\frac{2(n-2)}{n+4} gh}$$

El tiempo que demora el cuerpo 2 desde $2h$ hasta su punto más alto es

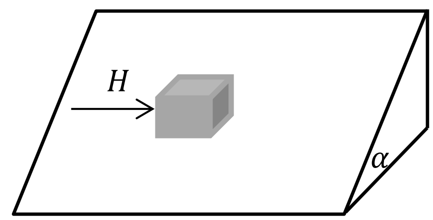
$$t = \frac{v_0}{g}$$

Luego la altura máxima es

$$y = 2h + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = 2h + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$y = 2h + 4\frac{(n-2)h}{n+4} = \frac{6nh}{n+4}$$

• Problema 12: Pregunta 2, control 2, semestre otoño 2011.



Un bloque de peso W descansa sobre un plano inclinado rugoso el cual forma un ángulo α con la horizontal.
1) Si el coeficiente de fricción estático es $\mu = 2\,tan(\alpha)$ y sobre el bloque está actuando una fuerza horizontal de magnitud H (la horizontal es considerada transversal a la pendiente del plano). Encuentre el valor mínimo de H que logra mover el bloque.
2) ¿En qué dirección, con respecto al plano, se moverá el bloque?

Se debe tener claro que la fuerza de roce se opone al movimiento del cuerpo, en este caso, se opondrá a la resultante de las fuerzas paralelas a la cuña. De esta forma,

$$\left|\vec{F}_{roce}\right|^2 = |H|^2 + |mg\sin(\alpha)|^2$$

Como el cuerpo está a punto de deslizar, se tiene que

$$F_{roce} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$$

Reemplazando en la ecuación anterior y considerando el valor del coeficiente de roce

$$(\mu mg\cos(\alpha))^2 = H^2 + (mg\sin(\alpha))^2$$

$$(2\tan(\alpha)\, mg\cos(\alpha))^2 = H^2 + (mg\sin(\alpha))^2$$

$$(2mg\sin(\alpha))^2 = H^2 + (mg\sin(\alpha))^2$$

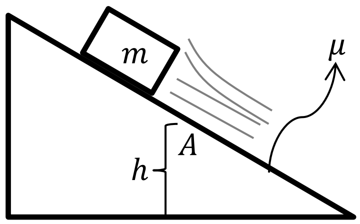
$$H^2 = 3\,(mg\sin(\alpha))^2$$

$$H = \sqrt{3}\, mg\sin(\alpha)$$

Una vez que el bloque comience a deslizar de moverá en la dirección de la fuerza de roce pero en sentido opuesto, es decir, hacia la derecha y hacia el extremo inferior de la cuña, formando un ángulo con la horizontal dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{mg\sin(\alpha)}{\sqrt{3}mg\sin(\alpha)}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$$

• Problema 13: Basado en pregunta 3, control recuperativo 1, año 2005.



Un bloque de masa m parte desde el reposo y desliza sobre un plano inclinado de ángulo α. Si el coeficiente de fricción dinámico entre el bloque y el plano es μ, mientras que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, encuentre el tiempo que demora en bloque en descender desde el punto A, el cual se encuentra a una altura h, hasta el comienzo del plano inclinado, suponiendo que este es lo suficientemente largo.

Las ecuaciones de movimiento de la masa son

$$-mg\sin\alpha + F_{roce} = -ma$$

$$N - mg\cos\alpha = 0$$

La fuerza de roce está compuesta por el roce dinámico y el roce viscoso

$$mg\sin\alpha - \mu N - \lambda v = ma$$

Reemplazando el valor de la normal

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \lambda v = ma$$

Después de un tiempo lo suficientemente largo, el cuerpo deja de acelerar, alcanzando su velocidad límite, la cual despejamos de esta última ecuación

$$v = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\lambda}$$

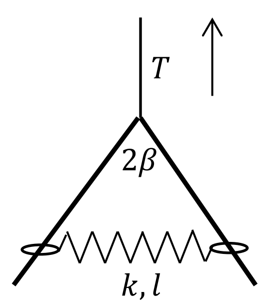
La distancia que recorre el bloque desde el punto A es

$$d = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Finalmente, el tiempo que demora es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{h}{\sin\alpha}\frac{\lambda}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

• Problema 14



En la figura se muestra una V invertida, de ángulo 2β de masa M, simétrica y pulida en el cual se pasan dos anillos de masa m unidos por un resorte de constante elástica k y largo natural l. El sistema es remolcado en el espacio mediante una cuerda cuya tensión es constante y de valor T. Si la separación entre los anillos es constante y no hay gravedad, determine la separación entre los anillos.

La ecuación dinámica para el sistema es

$$T = (M + 2m)a$$

Como la aceleración del sistema es la misma para cada anillo tenemos en cada uno de ellos

$$eje\ y : N\sin(\beta) = ma$$

$$eje\ x : N\cos(\beta) - kx = 0$$

Luego

$$x = \frac{N\cos(\beta)}{k}$$

Despejando la normal de la ecuación para el eje y tenemos

$$x = \frac{ma}{\sin(\beta)}\frac{\cos(\beta)}{k} = \frac{ma\cot(\beta)}{k}$$

Reemplazando la aceleración del sistema, obtenida de la ecuación dinámica del sistema

$$x = \frac{mT\cot\beta}{(M + 2m)k}$$

Finalmente la separación de los anillos es $l + x$, debido a que el resorte debe estirarse para que la fuerza restitutiva de esta anule la componente de la normal.

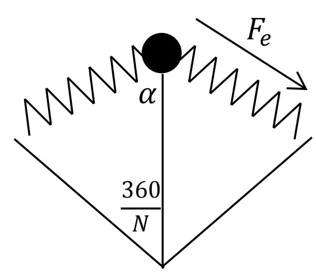
• Problema 15: Autoría de Rodrigo Sabaj

N partículas idénticas de masa m se unen mediante resortes idénticos de masa nula, constante elástica k y longitud natural L. El sistema toma la forma de un polígono regular de N lados mientras rota en torno a su centro con velocidad angular ω. Calcule la elongación experimentada por los resortes.

En este problema es necesario hacer el análisis solo a una masa, ya que para las restantes la situación es análoga. Claramente, en el eje tangencial a la trayectoria la fuerza neta es nula, pues el sistema rota con velocidad angular constante. En el eje radial, tenemos

$$-2kx\cos\alpha = -ma_c$$

$$2kx\cos\alpha = m\omega^2 R$$



Calculemos el ángulo que forma cada par de aristas del polígono. Uniendo cada vértice con el centro del polígono, formamos N triángulos, donde el ángulo asociado al centro es $\frac{360}{N}$. Luego, el ángulo entre la arista y uno de los otros lados del triángulo es

$$2\alpha + \frac{360}{N} = 180$$

$$\alpha = 90 - \frac{180}{N}$$

Calculemos el radio de la circunferencia descrita por cada masa, siendo α el ángulo que forma el resorte con el radio. Cada arista tiene un largo de $l + x$ ya que al estirarse el resorte, la fuerza resultante en cada masa apunta hacia el centro. Si el resorte se comprimiera, la fuerza resultante en cada masa sería radialmente hacia afuera. Luego,

$$R\cos\alpha = \frac{l+x}{2}$$

$$R = \frac{l+x}{2\cos\alpha}$$

Reemplazando en la expresión obtenida

$$2kx\cos\alpha = m\omega^2 R$$

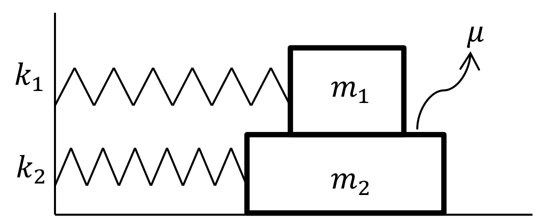
$$2kx\cos\alpha = m\omega^2\frac{l+x}{2\cos\alpha}$$

$$4kx\cos^2\alpha - m\omega^2 x = m\omega^2 l$$

$$x = \frac{m\omega^2 l}{4k\cos^2\left(90-\frac{180}{N}\right) - m\omega^2} = \frac{l}{\frac{4k\sin^2\left(\frac{180}{N}\right)}{m\omega^2} - 1}$$

• Problema 16: Ejercicio 9, año 2004, Prof. Andrés Meza.

Dos bloques de masas m_1 y m_2 se conectan a la pared por medio de resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 respectivamente. El bloque m_2 desliza sin roce con el piso pero entre los bloques existe un coeficiente de roce μ .Los resortes se encuentran en su largo natural cuando los bloques están inmóviles. Determine la amplitud máxima del movimiento que mantiene los bloques en reposo relativo.



Tomemos el instante en que el resorte presenta su máxima compresión. Las ecuaciones de movimiento de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, son

$$eje\ x: \delta k_1 + F_{roce} = m_1 a_1$$

$$eje\ y: N - m_1 g = 0$$

$$eje\ x: \delta k_2 - F_{roce} = m_2 a_2$$

$$eje\ y: R - N - m_2 g = 0$$

Para que exista reposo relativo, las aceleraciones de ambos cuerpos deben ser iguales en todo el movimiento. Además se cumple la igualdad conocida para la fuerza de roce:

$$F_{roce} = \mu N = \mu m_1 g$$

Reemplazando en las ecuaciones de movimiento

$$a_1 = \frac{\delta k_1}{m_1} + \mu g$$

$$a_2 = \frac{\delta k_2 - \mu m_1 g}{m_2}$$

Igualando ambas

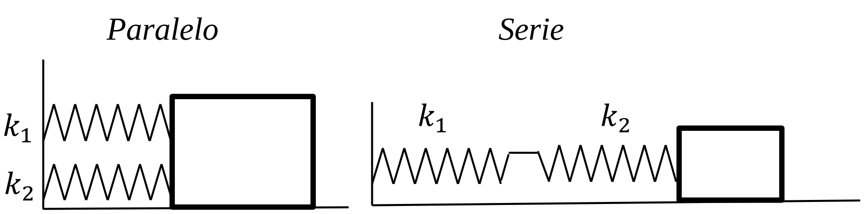
$$\frac{\delta k_1}{m_1} + \mu g = \frac{\delta k_2 - \mu m_1 g}{m_2}$$

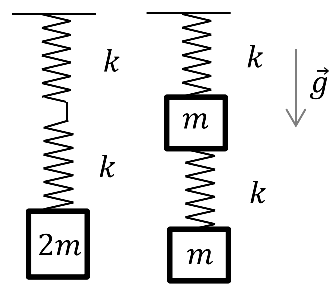
$$\delta\left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_2}\right) = -\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\mu g$$

$$\delta = -\mu g\left(\frac{m_2 + m_1}{m_2}\right)\left(\frac{m_1 m_2}{k_1 m_2 - k_2 m_1}\right) = m_1 \mu g \frac{m_2 + m_1}{k_2 m_1 - k_1 m_2}$$

• Problema 17

1) Calcule la constante elástica equivalente k_{eq} para un sistema compuesto por una masa y 2 resortes cuando estos se encuentren en serie y en paralelo. (La constante equivalente corresponde al valor que tendría la constante elástica en un sistema compuesto por una masa y un solo resorte el cual remplazaría a los resortes originales de la configuración.)





2) De las dos configuraciones que aparecen en la figura de la derecha ¿Cuál de ellas produce la mayor elongación del extremo inferior?

1) Supongamos que ambos cuerpos son de masa M. Haciendo los DCL de cada cuerpo, suponiendo estiramiento de los resortes, tenemos

$$paralelo: -k_1 x - k_2 x = -M a_p$$

$$-x(k_1 + k_2) = -M a_p$$

$$-x k_{eq} - M a_p$$

$$serie: -k_2 x_2 = -M a_s$$

Además, se cumple en esta configuración que $k_2 x_2 = k_1 x_1$, lo cual se obtiene al hacer el DCL del punto que une ambos resortes. Luego

$$x_1 + x_2 = \frac{k_2}{k_1} x_2 + x_2 = \left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right) x_2$$

Despejando x_2 y remplazando en la ecuación de movimiento del bloque

$$serie:\ -\frac{k_2(x_1+x_2)}{\frac{k_2}{k_1}+1}=-Ma_s$$

$$-\frac{(x_1+x_2)}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}=-Ma_s$$

$$-k_{eq}x=-Ma_s$$

Generalizando, se tiene que para la configuración en paralelo $k_{eq}=\sum k_i$ y para configuración en serie $\frac{1}{k_{eq}}=\sum\frac{1}{k_i}$.

<u>Regla nemotécnica</u>: la constante elástica equivalente se calcula de igual forma que la capacitancia equivalente o al revés que la resistencia equivalente.

2) Con lo aprendido anteriormente, para la configuración de la izquierda se tiene

$$\frac{k}{2}x=2mg$$

$$x=\frac{4mg}{k}$$

Para la configuración de la derecha escribimos las ecuaciones de movimiento para ambos cuerpos.

$$kx_1=mg$$

$$kx_2=mg+kx_1$$

Despejando $x_1=\frac{mg}{k}$ y $x_2=\frac{2mg}{k}$. Luego,

$$x_1+x_2=\frac{3mg}{k}$$

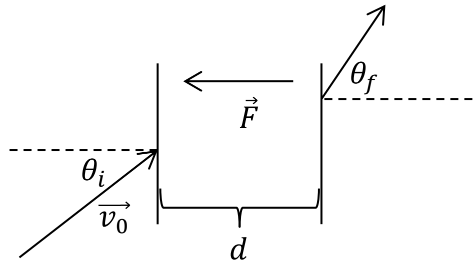
De esta forma, la configuración de la izquierda es la que presenta mayor elongación.

Unidad 3

Trabajo y energía

• Problema 1: Pregunta 4, control recuperativo 1, año 2005.

En el espacio entre dos planos paralelos separados por una distancia d existe una fuerza F constante y perpendicular a dichos planos en la dirección que se muestra en la figura. Considere una partícula de masa m que incide sobre uno de los planos con velocidad v_0 formando un ángulo θ_i con la normal a ese plano.



1) Encuentre una relación entre $\sin\theta_i$ y $\sin\theta_f$, donde θ_f es el ángulo con que la partícula emerge del segundo plano.
2) ¿Cuál es el mínimo valor del ángulo de incidencia que asegura que la partícula jamás llegue a travesar el segundo plano?

1) Calcularemos el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula. En el eje vertical, el trabajo es cero ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

$$W_y = \vec{F}\cdot\vec{y} = Fy\cos 90° = 0$$

Por Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W_y = \Delta K_y$$

$$0 = \frac{1}{2}m(v_0\sin\theta_i)^2 - \frac{1}{2}m(v_f\sin\theta_f)^2$$

$$v_0\sin\theta_i = v_f\sin\theta_f$$

De forma análoga, en el eje horizontal se tiene

$$W_x = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\Delta \mathrm{x}} = -Fd$$

$$W_x = \Delta K_x$$

$$-Fd = \frac{1}{2}m(v_f\cos\theta_f)^2 - \frac{1}{2}m(v_0\cos\theta_i)^2$$

$$v_f = \frac{1}{\cos\theta_f}\sqrt{(v_0\cos\theta_i)^{\,2} - \frac{2Fd}{m}}\ (*)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(v_0\cos\theta_i)^{\,2} - \frac{2Fd}{m}}{(1-\sin^2\theta_f)}}$$

Reemplazando en la primera igualdad obtenida

$$v_0\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{(v_0\cos\theta_i)^{\,2} - \frac{2Fd}{m}}{(1-\sin^2\theta_f)}}\sin\theta_f$$

$$\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{(\cos\theta_i)^{\,2} - \frac{2Fd}{m{v_0}^2}}{(1-\sin^2\theta_f)}}\sin\theta_f$$

2) El valor mínimo del ángulo de incidencia es tal que la velocidad horizontal de la partícula al llegar al segundo plano sea nula, o sea,

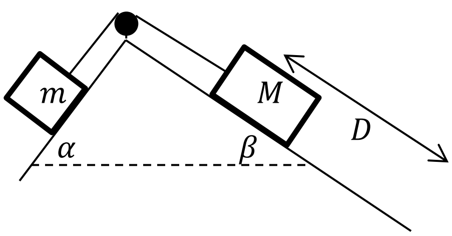
$$v_f\cos\theta_f = 0.$$

Así, en $(*)$

$$(v_0\cos\theta_i)^{\,2} = \frac{2Fd}{m}$$

$$\cos\theta_i = \sqrt{\frac{2Fd}{mv_0}}$$

• Problema 2: Problema 2, control 2, año 2003.



Dos bloques de masas m y M descansan sobre los planos inclinados de una cuña, unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea sin roce. El coeficiente de roce dinámico entre los bloques y la cuña es μ. Al soltar los bloques con la cuerda estirada, éstos comienzan a resbalar. Al cabo de un tiempo τ el bloque M ha recorrido una distancia D. Determine el coeficiente de roce entre los bloques y la superficie.

La diferencia de energía mecánica es el trabajo realizado por la fuerza de roce.

$$\Delta E = W_{roce}$$

Utilizando como nivel cero de energía potencial la posición inicial de los bloques

$$U_f + K_f - U_i - K_i = -|F_{roce}|\cdot D$$

$$mgD\sin\alpha - MgD\sin\beta + \frac{1}{2}(m+M)v^2 - 0 = -(mg\mu\cos\alpha + Mg\mu\cos\beta)D$$

Para el sistema se cumple que

$$D = \frac{1}{2}a\tau^2$$

$$v = a\tau$$

Luego

$$v = \frac{2D}{\tau}$$

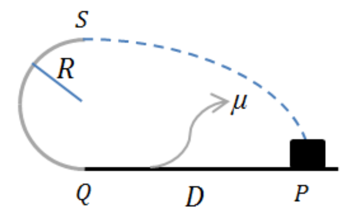
Así

$$mgD\sin\alpha - MgD\sin\beta + (m+M)\frac{2D^2}{\tau^2} - 0 = -(mg\mu\cos\alpha + Mg\mu\cos\beta)D$$

$$\mu = \frac{M\sin\beta - m\sin\alpha - (m+M)\frac{2D}{g\tau^2}}{m\cos\alpha + M\cos\beta}$$

• Problema 3

Un bloque de masa m desliza sobre una superficie horizontal rugosa que empalma suavemente con un tubo semicircular pulido de radio R. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el tramo rugoso PQ es μ. Determine la velocidad con que debe partir el bloque para que éste se deslice sobre el tramo rugoso PQ y luego sobre la superficie del tubo hasta salir volando del punto S para caer, finalmente, en el punto de partida P.



Este tipo de problemas resulta más fácil trabajarlos desde el final que desde el comienzo, por lo que primero usaremos cinemática para el movimiento parabólico descrito una vez que el bloque abandonó la semicircunferencia.
El tiempo de vuelo del bloque es

$$t_{vuelo} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

La rapidez con que debe salir el bloque de la semicircunferencia es

$$v_S = \frac{D}{t_{vuelo}} = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Ahora aplicamos conservación de la energía, considerando el suelo como nivel cero de energía potencial

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_Q^2 = \frac{1}{2}m{v_S}^2 + 2mgR$$

$$v_Q^2 = {v_S}^2 + 4gR$$

Finalmente, aplicamos el teorema del trabajo y energía cinética para obtener la velocidad con que es lanzado el cuerpo en el punto P.

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

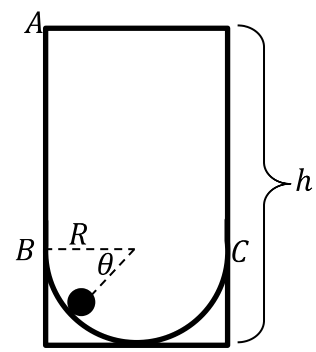
$$\overrightarrow{F_r} \cdot \Delta \vec{r} = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2$$

$$mg\mu \hat{\imath} \cdot -D\hat{\imath} = \frac{1}{2} m({v_S}^2 + 4gR) - \frac{1}{2} m v_P^2$$

$$v_P^2 = ({v_S}^2 + 4gR) + 2g\mu D$$

$$v_P = \sqrt{\frac{D^2 g}{4R} + 4gR + 2g\mu D}$$

• Problema 4



Una bolita de tamaño muy pequeño y masa m se suelta del reposo desde el punto A del borde interno de un vaso de paredes cilíndricas y fondo esférico de radio R, cuyas paredes no tienen roce. El vaso, que nunca resbala, es de masa M y posa sobre una superficie rugosa. El punto A se ubica a una altura h sobre aquella.
1) Calcule la aceleración de la bolita en función del ángulo θ medido desde la horizontal donde comienza la zona esférica.
2) Calcule la fuerza normal y la fuerza de roce ejercidas por la mesa sobre el vaso mientras la bolita circula por el tramo BC. Exprese los resultados en función del ángulo señalado anteriormente.

1) La aceleración es de la bolita se descompondrá en tangencial y centrípeta. La tangencial queda dada por

$$a_t = g \cos \theta$$

La centrípeta es

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La rapidez la calculamos usando conservación de la energía, estableciendo el nivel cero de energía potencial en el lugar donde comienza la semicircunferencia.

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$mg(h - R) = \frac{1}{2} m v^2 - mgR \sin \theta$$

$$v^2 = 2g\big(h - R(1 - sin\theta)\big)$$

Así

$$a_c = 2g\left(\frac{h}{R} - 1 + sin\theta\right)$$

2) En primer lugar calculamos la fuerza normal ejercida por el vaso sobre la bolita

$$N - mg\sin\theta = ma_c = 2mg\left(\frac{h}{R} - 1 + sin\theta\right)$$

$$N = 2mg\left(\frac{h}{R} - 1 + \frac{3}{2}sin\theta\right)$$

Por la tercera ley de Newton, esta fuerza es la misma en módulo pero con sentido contrario que ejerce la bolita sobre el vaso. De esta forma las ecuaciones de movimiento del vaso son

$$eje\ x: N\cos\theta - F_{roce} = 0$$

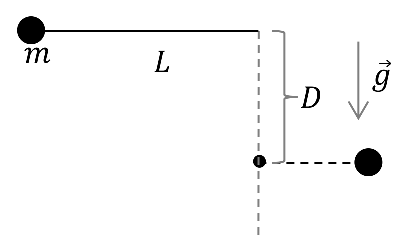
$$eje\ y: N' - Mg - N\sin\theta = 0$$

De esta forma

$$F_{roce} = \frac{2mg}{\cos\theta}\left(\frac{h}{R} - 1 + \frac{3}{2}sin\theta\right)$$

$$N' = Mg + 2mg\left(\frac{h}{R} - 1 + \frac{3}{2}sin\theta\right)\sin\theta$$

• Problema 5



La cuerda de la figura tiene una longitud L. Cuando la bolita se suelta desde el reposo en la posición mostrada, se moverá describiendo una circunferencia. Calcule la distancia D para que la masa del péndulo gire completamente alrededor de la clavija fija.

La ecuación de movimiento de la bolita en el eje radial al momento de pasar por la vertical, una vez que ya se ha enganchado la cuerda al clavo es

$$-T - mg = -ma_c = -\frac{mv^2}{L - D}$$

La condición límite para que el péndulo pueda girar alrededor de la clavija es que en el punto señalado anteriormente, la tensión sea nula, así

$$mg = \frac{mv^2}{L - D}$$

Como la tensión es perpendicular a la trayectoria de la masa, no realiza trabajo pudiéndose conservar la energía. Como el radio de la circunferencia descrita es $L - D$, la distancia desde la horizontal al punto más alto que alcanza es $D - R = D - (L - D)$. Tomando la horizontal como nivel cero de energía potencial, se tiene

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\big(D - (L - D)\big)$$

$$v^2 = 2g(2D - L)$$

Reemplazando en la igualdad obtenida

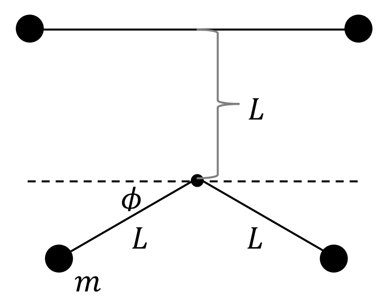
$$mg = \frac{2mg(2D - L)}{L - D}$$

$$L - D = 4D - 2L$$

$$D = \frac{3}{5}L$$

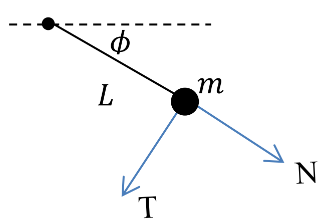
• Problema 6: Ejercicio 7, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones.

Considere dos masas m unidas por un hilo de largo $2L$ que caen con el hilo estirado de forma horizontal. Después de caer una distancia L, el centro del hilo choca con un clavo, correspondiendo de ahí en adelante la trayectoria de las 2 masas a un movimiento circular. Si el hilo se corta cuando la tensión llega a tener el valor $T_{max} = \frac{7}{2}mg$, encuentre el ángulo que en ese instante forma el hilo con la horizontal.



Se realizará el DCL de este problema solo para una de las bolitas, ya que el otro caso es análogo.

Una vez que la cuerda toma contacto con el clavo se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento para la masa en el instante en que la cuerda "está a punto de cortarse", en las cuales se usa el ya conocido sistema de referencia de la figura.



Para N: $mgsin(\phi) - T = ma_N$

Para T: $mgcos(\phi) = ma_T$

Como nos interesa solo la ecuación en el eje N, ya que en esta se encuentra contenida la tensión de la cuerda, solo seguimos trabajando con esta. La aceleración en este eje es la aceleración centrípeta, por lo que la ecuación queda

$$mgsin(\phi) - T = -m\frac{v^2}{R}$$

Despejando la tensión y reemplazando R por el largo de la cuerda, el cual es dato

$$T = m\frac{v^2}{L} + mgsin(\phi)$$

Como no conocemos la rapidez, hacemos uso de la conservación de la energía, ya que nuevamente solo hay una fuerza conservativa, mientras que la tensión es una fuerza del sistema, es decir, no es externa.

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$U_{inicial} + K_{inicial} = U_{final} + K_{final}$$

Tomando el nivel cero de energía potencial a la altura del clavo tenemos

$$mgL + 0 = -mgLsin(\phi) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gL(1 + \sin(\phi))$$

Luego

$$T = m\frac{2gL(1 + \sin(\phi))}{L} + mgsin(\phi)$$

Como nos dicen que la tensión al momento de cortarse es $\frac{7}{2}mg$, despejamos el ángulo

$$m\frac{2gL(1 + \sin(\phi))}{L} + mgsin(\phi) = \frac{7}{2}mg$$

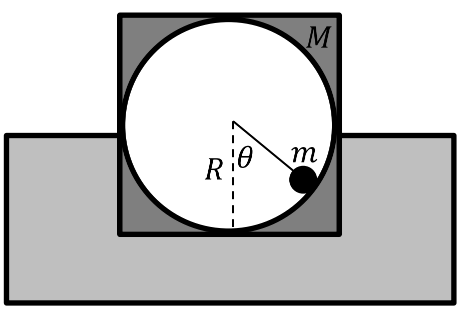
$$2 + 2sin(\phi) + \sin(\phi) = \frac{7}{2}$$

$$3\sin(\phi) = \frac{3}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{1}{2}$$

$$\phi = 30° = \frac{\pi}{6}$$

- Problema 7: Pregunta 3, control 2, año 2002



Un cubo de masa M, que tiene un hueco esférico de radio R en su centro, descansa en un orificio de superficies rectas perfectamente pulidas. Al interior del cubo hay una bolita de masa m que gira sin ayuda externa en una trayectoria circunferencial que pasa por el punto más bajo del hueco con velocidad v_0.

1) Calcule la fuerza de contacto bolita-superficie en función del ángulo θ medido con respecto a la vertical.

2) Determine el rango de la velocidad v_0 que garantiza que la bolita nunca pierda contacto con la superficie ni que el cubo pierda contacto con el fondo del orificio.

1) La ecuación de movimiento de la bolita en el eje radial es

$$mg\cos\theta - N = -m\omega^2 R$$

Conservando la energía, con el nivel cero de energía potencial en el centro de la esfera

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 - mgR\cos\theta$$

$$\omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} + 2g\cos\theta - 2g$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg + m\frac{v_0^2}{R}$$

2) El punto crítico es el más alto de la trayectoria de la bolita. Para que esta nunca se despegue, imponemos que la normal se anule en ese punto

$$0 = 3mg\cos\pi - 2mg + m\frac{v_0^2}{R}$$

$$v_0 = \sqrt{5gR}$$

Para el caso del bloque, el caso crítico es que la normal ejercida por la bolita sobre el bloque, que por la 3ra ley de Newton es de igual módulo y dirección pero con sentido contrario que la normal ejercida por el bloque sobre la bolita, iguale al peso de aquel, pues así se anula la normal entre el cubo y el orificio. Así,

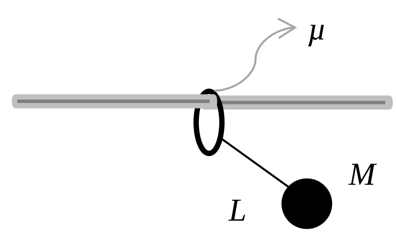
$$N = Mg$$

$$3mg\cos\pi - 2mg + m\frac{v_0^2}{R} = Mg$$

$$v_0 = \sqrt{gR\left(\frac{M}{m} + 5\right)}$$

- Problema 8

Una argolla de masa m se encuentra sobre una barra con la cual hay un coeficiente de roce μ. Atada a la primera se encuentra una cuerda de largo L en cuyo otro extremo se encuentra una masa M, la cual es soltada con rapidez nula desde la horizontal. Encuentre una expresión para el ángulo en el cual la argolla comienza a moverse en la barra.



Sea θ el ángulo que forma la cuerda don la horizontal. Las ecuaciones de movimiento para la argolla son

$$eje\ x: T\cos\theta - F_{roce} = ma_x$$

$$eje\ y: N - mg - T\sin\theta = ma_y = 0$$

Como hay dependencia de la tensión, escribimos las ecuaciones para la masa M.

$$T - Mg\sin\theta = Ma_c = M\frac{v^2}{L}$$

$$Mg\cos\theta = Ma_t$$

La rapidez de la masa, necesaria para conocer la tensión, la calculamos con conservación de la energía, tomando como nivel cero de energía potencial la horizontal.

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 = \frac{1}{2}Mv^2 - MgL\sin\theta$$

$$v^2 = 2gL\sin\theta$$

De esta forma

$$T = Mg\sin\theta + M\frac{2gL\sin\theta}{L} = 3Mg\sin\theta$$

Cuando comienza a moverse la argolla se cumple la igualdad $F_{roce} = \mu N$ junto con que su aceleración es nula. En la ecuación del eje y de la argolla

$$N = mg + T\sin\theta = mg + 3Mg\sin^2\theta$$

Reemplazando en la ecuación del eje x

$$3Mg\sin\theta\cos\theta - mg\mu - 3Mg\sin^2\theta\,\mu = 0$$

• Problema 9: Ejercicio 10, año 2002, Prof. Hugo Arellano.

Un bloque de masa m es eyectado por un resorte de constante elástica k. El bloque desliza por un tramo horizontal con roce y luego sube por un tramo liso una altura H por determinar. Una vez que el cubo alcanza el punto más alto, este retorna y comprime el resorte en $\beta\Delta$, con Δ la compresión del resorte utilizada para eyectar el bloque. Determine la altura máxima H de subida del bloque en el tramo indicado.

Como el bloque pasa 2 veces en el tramo rugoso, la variación de energía potencial elástica equivale al doble del trabajo realizado por el roce en cada pasada, así

$$2W_{fr} = \Delta U_e$$

$$W_{fr} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k\beta^2\Delta^2 - \frac{1}{2}k\Delta^2\right) = \frac{1}{4}k\Delta^2(\beta^2 - 1)$$

Como el trabajo de la fuerza de roce es negativo, claramente $\mathrm{B} < 1$. Ahora obtenemos la altura máxima alcanzada

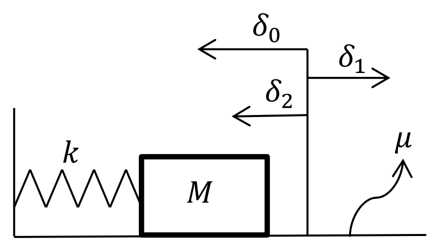
$$W_{fr} = \Delta E$$

$$\frac{1}{4}k\Delta^2(\beta^2 - 1) = mgH - \frac{1}{2}k\Delta^2$$

$$H = \frac{1}{4}\frac{k\Delta^2}{mg}\,(\beta^2 + 1)$$

• Problema 10

Una masa M está atada al extremo de un resorte de constante k, adosado a una pared. La masa desliza sobre un plano horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es μ. Inicialmente el resorte está comprimido a una distancia δ_0 con respecto a su posición de equilibrio. En t=0, la masa se suelta, llegando a alcanzar el resorte una elongación máxima δ_1, luego vuelve y alcanza una distancia máxima δ_2, y así sucesivamente. Encuentre una relación entre δ_i y δ_{i+1}.



La diferencia de energía potencial entre las distintas posiciones está dada por trabajo realizado por la fuerza de roce.

$$E_f - E_i = W_{roce}$$

En el primer movimiento hacia la derecha tenemos

$$\frac{1}{2}k\delta_1^2 - \frac{1}{2}k\delta_0^2 = -Mg\mu\hat{\imath}\cdot(\delta_0 + \delta_1)\hat{\imath}$$

$$\frac{1}{2}k\delta_1^2 - \frac{1}{2}k\delta_0^2 = -Mg\mu(\delta_0 + \delta_1)$$

$$\frac{1}{2}k(\delta_0 + \delta_1)(\delta_1 - \delta_0) = -Mg\mu(\delta_0 + \delta_1)$$

$$\delta_1 - \delta_0 = -\frac{2Mg\mu}{k}$$

En el primer movimiento hacia la izquierda

$$\frac{1}{2}k\delta_2^2 - \frac{1}{2}k\delta_1^2 = Mg\mu\hat{\imath}\cdot -(\delta_1 + \delta_2)\hat{\imath}$$

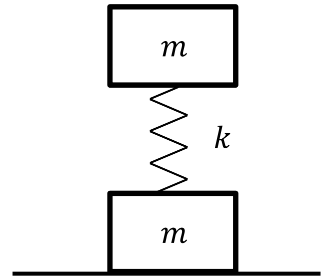
$$\frac{1}{2}k\delta_2^2 - \frac{1}{2}k\delta_1^2 = -Mg\mu(\delta_1 + \delta_2)$$

$$\delta_2 - \delta_1 = -\frac{2Mg\mu}{k}$$

Generalizando

$$\delta_{i+1} - \delta_i = -\frac{2Mg\mu}{k}$$

• Problema 11: Pregunta 4, control 2, semestre otoño 2009



Considere dos bloques de masa m unidos por un resorte de constante elástica k. EL sistema formado por los dos bloques y el resorte descansa en forma vertical sobre una mesa tal como lo indica la figura. ¿En cuánto debe comprimirse el resorte con respecto al largo natural para que al soltar el sistema, éste eventualmente se despegue de la mesa?

En la situación inicial, la compresión del resorte la obtenemos escribiendo la ecuación dinámica del bloque superior

$$kx_1 - mg = 0$$

$$x_1 = \frac{mg}{k}$$

Dicha ecuación para el bloque inferior es

$$N - mg + kx = ma$$

donde se ha considerado negativo el valor de x cuando el resorte se comprime y positivo cuando se estira. Sea x_2 la elongación mínima del resorte necesaria para que la normal se anule y así el bloque inferior se despegue. Luego

$$x_2 = \frac{mg}{k}$$

Sea x la compresión extra que se le debe aplicar al resorte para que al estirarse llegue a x_2 por sobre el largo natural. Conservando la energía e imponiendo el nivel cero de energía potencial en el suelo

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}k(x_1 + x)^2 + mg(l_0 - x_1 - x) = \frac{1}{2}k(x_2)^2 + mg(l_0 + x_2)$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + x\right)^2 + mg\left(l_0 - \frac{mg}{k} - x\right) = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + mgx + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{(mg)^2}{k} - mgx = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{k}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = 2\frac{(mg)^2}{k}$$

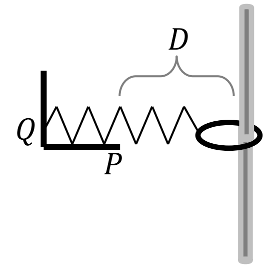
$$x = \frac{2mg}{k}$$

Esta es la compresión extra desde el punto de equilibrio dado por x_1, así la compresión desde el largo natural es

$$x + x_1 = \frac{3mg}{k}$$

• Problema 12

Uno de los extremos de un resorte ideal liso se fija a la pared en Q y el otro se ata a una argolla de masa m pasada por un riel vertical sin roce. La argolla es soltada desde un punto a nivel con Q, quedando el resorte recto en contacto con el soporte P sin roce y sin experimentar elongación. La distancia entre P y el riel es D. Determine la constante elástica del resorte si su fuerza máxima sobre Q es T.



La fuerza máxima se alcanza cuando la elongación es máxima. Como no hay fuerzas disipativas, conservamos la energía suponiendo que la argolla descendió una distancia h

$$E_i = E_f$$

$$0 = \frac{1}{2}kx^2 - mgh$$

con x la elongación máxima de resorte, por lo que además se cumple

$$T = kx$$

Supongamos que la distancia entre P y Q es l. La elongación estará dada por

$$x = \left(l + \sqrt{D^2 + h^2}\right) - (l + D)$$

Operando

$$x + D = \sqrt{D^2 + h^2}$$

$$x^2 + 2xD + D^2 = D^2 + h^2$$

Remplazando h desde la ecuación de conservación de la energía

$$x^2 + 2xD = \frac{k^2x^4}{4(mg)^2}$$

y utilizando el valor de T

$$x^2 + 2xD = \frac{T^2}{4(mg)^2}x^2$$

Descartando la solución nula

$$x - \frac{T^2}{4(mg)^2}x = -2D$$

$$x = \frac{2D}{\frac{T^2}{4(mg)^2} - 1}$$

Finalmente, el valor de la constante es

$$k = \frac{T}{x} = \frac{T}{2D}\left(\frac{T^2}{4(mg)^2} - 1\right)$$

- Problema 13

Para un ciclista de ruta, el coeficiente de arrastre es 0.0045*, el área frontal es de* $0{,}463\ m^2$ *y el coeficiente de fricción de rodamiento es* 1*. Si el ciclista tiene una masa de* $50\ kg$ *y su bicicleta,* $12\ kg$*.*

1) Para mantener una rapidez de $12\frac{m}{s}$ *en un camino plano, ¿qué potencia debe suministrar el ciclista a la rueda trasera?*

2) En carreras de velocidad, este mismo ciclista usa otra bicicleta con coeficiente de fricción de rodamiento de $0{,}003$ *y masa de* $7\ kg$*. Además, el ciclista se encorva para reducir su coeficiente de arrastre a* $0{,}88$ *y su área frontal a* $0{,}463\ m^2$ *. ¿Qué potencia debe suministrar ahora a la rueda trasera para mantener una rapidez de* $12\frac{m}{s}$*?*

3) En la situación de la parte (2), ¿qué potencia se requiere para mantener una rapidez de $6\frac{m}{s}$*? Tome nota de la gran reducción en la potencia requerida cuando la rapidez sólo se reduce a la mitad.*

Datos: La fuerza de arrastre de un fluido es $F=\frac{1}{2}CA\rho v^2$*, donde C es el coeficiente de arrastre, A el área transversal y* ρ *es la densidad del fluido, que en el caso del aire es* $1{,}2\ \frac{kg}{m^3}$*.*

(Es raro que en las evaluaciones hagan este tipo de problemas, solo lo coloco por mi afición a la bicicleta y lo interesante del resultado de este problema)

1) Como el ciclista se mueve con velocidad constante, tenemos

$$F_{ciclista}-F_{rodamiento}-F_{arrastre}=0$$

$$F_{ciclista}=\mu mg+\frac{1}{2}CA\rho v^2$$

$$F_{ciclista}=0{,}0045\cdot 62[kg]\cdot 9{,}8\left[\frac{m}{s}\right]+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}463[m^2]\cdot 1{,}2\left[\frac{kg}{m^3}\right]\cdot\left(12\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2$$

$$F_{ciclista}=42{,}63[N]$$

Luego, la potencia entregada por el ciclista es

$$P=Fv$$

$$P=42{,}73[N]\cdot 12\left[\frac{m}{s}\right]=512{,}85\ [W]$$

2) En este caso

$$F_{ciclista}=0{,}003\cdot 57[kg]\cdot 9{,}8\left[\frac{m}{s}\right]+\frac{1}{2}\cdot 0{,}88\cdot 0{,}366[m^2]\cdot 1{,}2\left[\frac{kg}{m^3}\right]\cdot\left(12\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2$$

$$F_{ciclista}=29{,}5[N]$$

$$P=33{,}3[N]\cdot 12\left[\frac{m}{s}\right]=354\ [W]$$

3) En este caso

$$F_{ciclista} = 0{,}003 \cdot 57[kg] \cdot 9{,}8\left[\frac{m}{s}\right] + \frac{1}{2} \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}366[m^2] \cdot 1{,}2\left[\frac{kg}{m^3}\right] \cdot \left(6\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2$$

$$F_{ciclista} = 8{,}63[N]$$

$$P = 8{,}63[N] \cdot 6\left[\frac{m}{s}\right] = 51{,}78\ [W]$$

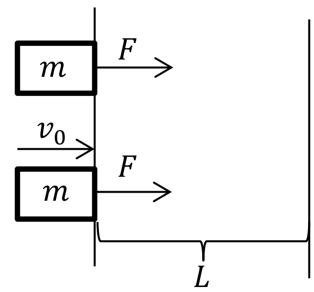
De esta forma, reducir la velocidad desde los 43,2 a los 21,6 kilómetros por hora significa entregar una potencia casi 7 veces menor.

Unidad 4

Momentum lineal y choques

• Problema 1: Pregunta 2, ejercicio 8, semestre otoño 2011, Prof. Diego Mardones

Dos fuerzas idénticas empujan a dos bloques de igual masa una distancia L. El primer bloque está inicialmente en reposo y el segundo bloque tiene una rapidez inicial v_0 como indica la figura. ¿Cuál bloque sufre un mayor cambio de momentum?



Recordando la definición de impulso para fuerzas constantes se tiene

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Como se aplica la misma fuerza en ambos cuerpos, debemos analizar cuál se demora menos en llegar. De forma intuitiva, el cuerpo con rapidez inicial v_0 sufre menor cambio de momentum, lo cual verificaremos con las ecuaciones de itinerario de los cuerpos.

$$L = \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$L = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

Claramente $t_2 < t_1$, pues en la segunda ecuación el término lineal asociado al tiempo hace que este sea menor. Notar que se usó la misma aceleración para ambos cuerpos pues tienen la misma masa. Así

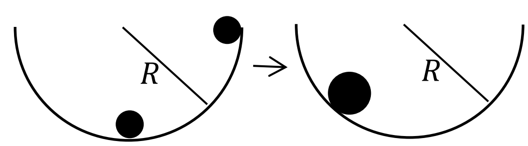
$$F = F$$

$$F t_1 > F t_2$$

$$\Delta \vec{p}_1 > \Delta \vec{p}_2$$

• Problema 2

Una masa m es soltada desde el punto más alto de un tazón semiesférico de radio R, encontrándose en su camino con otra masa de las mismas características, la cual está en reposo en el punto más bajo de aquel, quedando unidas tras el impacto. Despreciando la fricción entre las masas y el tazón, determine la altura máxima alcanzada por el sistema.



Como la fuerza gravitatoria es conservativa, la rapidez con que llegará la masa al punto más bajo no depende del camino que siga, así

$$v_1 = \sqrt{2gR}$$

En el choque se conserva el momentum lineal

$$\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f}$$

$$m_1 \overrightarrow{v_{1i}} + m_2 \overrightarrow{v_{2i}} = (m_1 + m_2) \overrightarrow{v_f}$$

$$m\sqrt{2gR}\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\imath} = 2mv_f\hat{\imath}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

Finalmente conservamos la energía

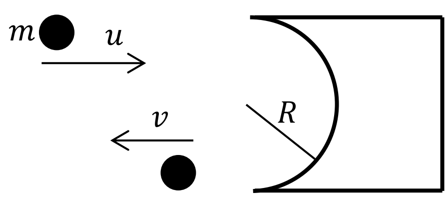
$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_f^2 = 2mgh$$

$$\frac{mgR}{2} = 2mgh$$

$$h = \frac{R}{4}$$

• Problema 3



Considere un sólido de masa desconocida en reposo sobre una superficie horizontal muy resbalosa. El cuerpo tiene una cara cóncava semiesférica de radio R cuyo borde inferior queda a ras de piso. Una bolita de masa m es disparada horizontalmente con rapidez u sobre el punto más alto de la cara cóncava y muy cerca de ésta. Luego del contacto sin roce entre los cuerpos el bloque adquiere movimiento mientras que la bolita emerge en sentido opuesto, con rapidez v a ras de piso. Determine la masa del bloque si todo lo descrito ocurre en presencia de la gravedad g.

Conservando la energía, se tiene

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mu^2 + 2mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + 0$$

Además, en el eje horizontal se conserva el momentum lineal. El signo negativo que aparece es porque el sólido termina moviéndose en dirección contraria a la cuña.

$$\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f}$$

$$mu\hat{\imath} + 0\hat{\imath} = MV\,\hat{\imath} - mv\,\hat{\imath}$$

$$V = \frac{m}{M}(u + v)$$

Reemplazando en la primera igualdad obtenida

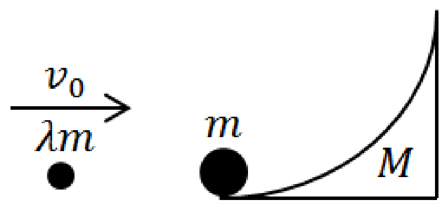
$$mu^2 + 4mgR = mv^2 + M\left(\frac{m}{M}(u+v)\right)^2$$

$$\frac{m^2}{M}(u+v)^2 = m(u^2 - v^2) + 4mgR$$

$$M = m\frac{(u+v)^2}{(u^2 - v^2) + 4gR}$$

• Problema 4: Ejercicio primavera 2, año 2001, Prof. Hugo Arellano.

Una bolita de masa m posa sobre el punto más bajo de una cuña curva de masa M. Un proyectil de masa λm se propaga con rapidez v_0 al encuentro de la bolita; como resultado del choque, ambos cuerpos quedan adheridos y comienzan a subir la cuña, arrastrándola consigo. La cuña es sumamente resbaladiza en todas sus superficies.



1) Determine la rapidez del par bolita-proyectil inmediatamente después del choque.
2) Determine la altura máxima alcanzada por el par bolita-proyectil sobre la cuña.
3) Después que el par ha alcanzado su punto más alto sobre la cuña, este comienza a caer hasta separarse de ella. Determine la rapidez de la cuña y del par una vez separados.
4) Analice sus resultados de la parte anterior para $\lambda(1+m) = M$ e interprete.

1) Conservando el momentum lineal

$$\vec{p_i} = \vec{p_f}$$

$$\lambda m v_0 \hat{\imath} + 0\hat{\imath} = (\lambda m + m)v_1\hat{\imath}$$

$$v_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}v_0$$

2) Debemos notar que en el punto más alto, el par no tiene componente de velocidad en el eje vertical pero sí en el horizontal, ya que se mueve solidariamente con la cuña. De esta forma, conservamos, en primer lugar, el momentum lineal donde, por transitividad, es igual al momentum del proyectil

$$\vec{p_i} = \vec{p_f}$$

$$\lambda m v_0 \hat{\imath} = \big((\lambda + 1)m + M\big)v_2\hat{\imath}$$

$$v_2 = \frac{\lambda m v_0}{(\lambda + 1)m + M}$$

Para determinar la altura máxima, conservamos la energía

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}m(\lambda+1)v_1^2+0=\frac{1}{2}\big((\lambda+1)m+M\big)v_2^2+(\lambda+1)mgh$$

$$\frac{m\lambda^2}{2(\lambda+1)}v_0^2=\frac{(m\lambda)^2}{2\big((\lambda+1)m+M\big)}v_0^2+(\lambda+1)mgh$$

$$h=\frac{(\lambda v_0)^2}{2g(\lambda+1)^2}\left(1-\frac{m(\lambda+1)}{\big((\lambda+1)m+M\big)}\right)$$

3) La energía, tras el primer choque, se conserva en todo momento, así

$$\frac{1}{2}m(\lambda+1)v_1^2=\frac{1}{2}\ m(\lambda+1)v_f^2+\frac{1}{2}MV_f^2$$

$$\frac{m\lambda^2}{\lambda+1}v_0^2=m(\lambda+1)v_f^2+MV_f^2$$

El momentum se conserva siempre en este problema. Suponiendo que el par masa proyectil, se moverá en el mismo sentido que la cuña

$$\lambda m v_0\hat{\imath}=m(\lambda+1)v_f\hat{\imath}+MV_f\hat{\imath}$$

$$MV_f^2=\frac{m^2}{M}\big(\lambda v_0-(\lambda+1)v_f\big)^2$$

Reemplazando en la ecuación de energía

$$\frac{m\lambda^2}{\lambda+1}v_0^2=m(\lambda+1)v_f^2+\frac{m^2}{M}\big(\lambda v_0-(\lambda+1)v_f\big)^2$$

$$M(\lambda+1)v_f^2-\frac{M\lambda^2}{\lambda+1}v_0^2+m\lambda^2v_0^2-2m\lambda(\lambda+1)v_0v_f+m(\lambda+1)^2v_f^2=0$$

$$v_f^2\big(m(\lambda+1)^2+M(\lambda+1)\big)-2m\lambda(\lambda+1)v_0v_f+v_0^2\left(m\lambda^2-\frac{M\lambda^2}{\lambda+1}\right)=0$$

$$v_f=\frac{2m\lambda(\lambda+1)v_0\pm\sqrt{(2m\lambda(\lambda+1)v_0)^2-4\big(m(\lambda+1)^2+M(\lambda+1)\big)v_0^2\left(m\lambda^2-\frac{M\lambda^2}{\lambda+1}\right)}}{2\big(m(\lambda+1)^2+M(\lambda+1)\big)}$$

$$v_f=\frac{2m\lambda(\lambda+1)v_0\pm\sqrt{4\left(mM\lambda^2(\lambda+1)+M^2\lambda^2-mM\lambda^2(\lambda+1)\right)v_0^2}}{2\big(m(\lambda+1)^2+M(\lambda+1)\big)}$$

$$v_f=\frac{2m\lambda(\lambda+1)v_0\pm 2M\lambda v_0}{2\big(m(\lambda+1)^2+M(\lambda+1)\big)}$$

Tomando la solución menor (∗), lo que se verifica en la siguiente pregunta

$$v_f=\frac{\lambda}{\lambda+1}v_0\left(\frac{m(\lambda+1)-M}{m(\lambda+1)+M}\right)$$

Para la cuña, se obtiene

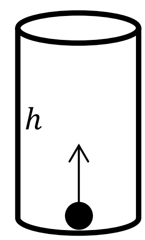
$$V_f = \frac{m}{M}\left(\lambda v_0 - (\lambda + 1)v_f\right)$$

$$V_f = \frac{m}{M}v_0\left(1 - \frac{m(\lambda + 1) - M}{m(\lambda + 1) + M}\right)$$

$$V_f = \frac{2m\lambda v_0}{m(\lambda + 1) + M}$$

4) Evaluando el caso especial $(\lambda + 1)m = M$ tenemos que $v_f = 0$ y $V_f = \frac{m}{M}\lambda v_0$. Esto es correcto pues es análogo al caso de un choque elástico entre dos masas iguales, donde una de ellas está en reposo; en este caso toda la energía cinética es traspasada del cuerpo móvil al inmóvil, quedando el primero en reposo. Además, en este caso vemos como el momentum del proyectil es traspasado íntegramente a la cuña.

• Problema 5



Dentro de un cilindro rígido de masa m y altura h se ubica una bolita de la misma masa. El cilindro posa verticalmente y la bolita salta desde el fondo del cilindro hacia arriba con una rapidez inicial tal que le permitiría llegar a una altura 2h, sin embargo la bolita choca con el techo del cilindro y rebota elásticamente. Calcular la altura con respecto al suelo con que la bolita choca por primera vez con la base del cilindro.

Conservando la energía para la bolita, obtenemos la rapidez con que impacta al cilindro

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = 2mgh + 0$$

$$v_i = \sqrt{2gh}$$

Luego conservamos el momentum lineal y la energía cinética en el choque por ser del tipo elástico, donde v' es la rapidez del cilindro y v_f la rapidez de la bolita tras el choque.

$$\vec{p_i} = \vec{p_f}$$

$$mv_i\hat{j} + 0\hat{j} = mv'\hat{j} - mv_f\hat{j}$$

$$v_i = v' - v_f$$

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

$$v_i^2 = v_f^2 + v'^2$$

Despejando v_f en la 1ra ecuación y remplazando en la 2da

$$v_i^2 = (v' - v_i)^2 + v'^2$$

$$v_i^2 = v'^2 - 2v'v_i + v_i^2 + v'^2$$

$$v'^2 = v'v_i$$

Tomando solución no nula, pues el cilindro debe moverse tras el choque, obtenemos

$$v' = v_i$$

$$v_f = 0$$

Ahora debemos encontrar el punto donde se encuentra base del cilindro y bolita, para lo cual acudiremos a la cinemática en una dimensión.

$$bolita: y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$base: y = v't - \frac{1}{2}gt^2$$

Igualando posiciones

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = v't - \frac{1}{2}gt^2$$

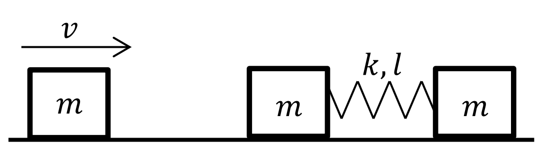
$$t = \frac{h}{v'}$$

Reemplazando en la ecuación para la bolita

$$y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v'}\right)^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_i}\right)^2$$

$$y = h - \frac{gh^2}{4gh} = \frac{3h}{4}$$

• Problema 6



En un plano horizontal absolutamente liso se encuentran dos barras elásticas de igual masa m unidas por un muelle de longitud l. El coeficiente elástico del muelle es k. Sobre una de las barras, por ejemplo sobre la izquierda, cae con velocidad v una tercera barra cuya masa también es m.
1) Demostrar que las barras unidas por el muelle se moverán siempre en una misma dirección.
2) Determinar las velocidades de las mismas cuando el muelle está estirado al máximo y la separación entre estas.

1) Dado que el choque es elástico y los cuerpos tienen igual masa, la velocidad final del cuerpo proveniente desde la izquierda es nula. Denominando v_1 y v_2 las velocidades de las masas unidas por el resorte tras el choque, conservamos momemtum líneal y energía. La primera se puede conservar ya que el resorte actúa como una fuerza interna del sistema, no alterándose la cantidad de movimiento del sistema. Así

$$mv\hat{\imath} = mv_1\hat{\imath} + mv_2\hat{\imath}$$

$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{kx^2}{m} = v^2 - (v_1^2 + v_2^2)$$

Remplazando v

$$\frac{kx^2}{m} = (v_1 + v_2)^2 - (v_1^2 + v_2^2)$$

$$\frac{kx^2}{m} = 2v_1v_2$$

De esta forma v_1 y v_2 deben tener el mismo signo pues kx^2 es un valor positivo. Además $v_1 + v_2$ es positivo, obligando a que se cumpla que las velocidades de los cuerpos unidos por el muelle tras el choque sean siempre positivas, moviéndose, en este caso, siempre a la derecha.

2) A partir de la última relación obtenida, vemos que el estiramiento del resorte es máximo cuando el producto de las velocidades es máximo. Partiendo de la siguiente desigualdad y desarrollando

$$(v_1 - v_2)^2 \geq 0$$

$$v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 \geq 0$$

$$v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2 \geq 4v_1v_2$$

$$(v_1 + v_2)^2 \geq 4v_1v_2$$

$$v^2 \geq 4v_1v_2$$

$$v_1v_2 \leq \frac{v^2}{4}$$

El valor máximo del producto se alcanza cuando se cumple la igualdad por lo que las velocidades de los bloques cuando el estiramiento del muelle es máximo es

$$v_1' = v_2' = \frac{v}{2}$$

Para quienes ya saben derivar, un camino mucho más fácil es igualar la primera derivada de la función a cero, así

$$f = v_1v_2 = v_1(v - v_1) = vv_1 - v_1^2$$

$$\frac{df}{dv_1} = v - 2{v_1}' = 0$$

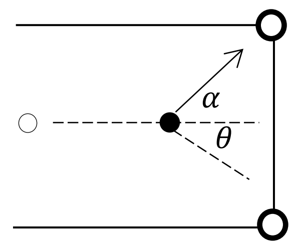
$$v_1' = \frac{v}{2}$$

Luego, la separación de los cuerpos es

$$d = l + x = l + v\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

• Problema 7:

En el desarrollo de un juego de pool, la recta que une la bola blanca con la bola a golpear forma un ángulo α con la recta que une bola a golpear y buchaca. Si el lanzador logra echar la bola a golpear, ¿con qué ángulo se deflecta la bola blanca? Haga las suposiciones necesarias.



Conservando el momentum lineal

$$\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f}$$

$$m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} + m_2\overrightarrow{v_{2f}}$$

Suponiendo bolas iguales y sabiendo que la bola a golpear está en reposo, la ecuación se reduce a

$$\overrightarrow{v_{1i}} = \overrightarrow{v_{1f}} + \overrightarrow{v_{2f}}$$

Además supondremos choque elástico, por lo que la energía cinética se conserva

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

Recordando que $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, en la primera ecuación se obtiene

$$\overrightarrow{v_{1i}}\cdot\overrightarrow{v_{1i}} = (\overrightarrow{v_{1f}} + \overrightarrow{v_{2f}})\cdot(\overrightarrow{v_{1f}} + \overrightarrow{v_{2f}})$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\overrightarrow{v_{1f}}\cdot\overrightarrow{v_{2f}}$$

Utilizando lo obtenido en la ecuación de energía y la definición de producto punto

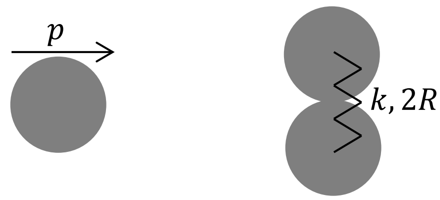
$$2v_{1f}v_{2f}\cos(\alpha + \theta) = 0$$

con θ el ángulo con que se reflecta la bola

$$\cos(\alpha + \theta) = 0$$

$$\theta = 90 - \alpha$$

• Problema 8: Pregunta 2, Control recuperativo, año 2004.



Un disco de radio R y masa m desliza con momentum $p = p\hat{\imath}$ sobre una superficie horizontal sin roce. En su trayectoria impacta, simultáneamente, con dos discos en reposo de masa m y radio R, dispuestos simétricamente en su camino, con sus centros en $y = R$ e $y = -R$ respectivamente. Los discos están unidos por un resorte de largo natural $2R$ y constante elástica k. Suponiendo que las colisiones son elásticas:

1) Calcule el ángulo que forma el vector momentum lineal de cada disco con el eje x inmediatamente después del choque, es decir, mientras el resorte aún no experimenta elongación.

2) Calcule el momentum lineal de los 3 discos inmediatamente después del choque.

3) Determine la máxima elongación del resorte.

1) Los discos golpeados se moverán siguiendo la recta que une los centros del disco que impacta y el centro de ellos. De esta forma, se cumple

$$2R\sin(\phi) = R$$

$$\sin(\phi) = \frac{1}{2}$$

$$\phi = 30°$$

2) Sean p_1, p_2 y p_3 los módulos del momentum lineal del disco que impacta, del disco superior e inferior tras el choque. Conservando el momentum lineal en cada eje tenemos

$$p\hat{\imath} = p_1\hat{\imath} + p_2\cos(\phi)\,\hat{\imath} + p_3\cos(\phi)\,\hat{\imath}$$

$$0 = p_2\sin(\phi)\,\hat{\jmath} - p_3\sin(\phi)\,\hat{\jmath}$$

$$p_2 = p_3$$

reemplazando en la primera ecuación y evaluando $\cos(\phi)$

$$p = p_1 + \sqrt{3}p_2$$

Conservando la energía cinética por tratarse de una colisión elástica

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_3^2}{m}$$

$$p^2 = p_1^2 + 2p_2^2$$

Utilizando lo obtenido anteriormente

$$p^2 = \left(p - \sqrt{3}p_2\right)^2 + 2p_2^2$$

$$p^2 = p^2 - 2p\sqrt{3}p_2 + 3p_2^2 + 2p_2^2$$

$$5p_2^2 = 2p\sqrt{3}p_2$$

tomando la solución no nula

$$p_2 = p_3 = \frac{2\sqrt{3}}{5}p$$

luego

$$p_1 = p - \frac{6}{5}p$$

$$p_1 = -\frac{1}{5}p$$

Vectorialmente, el momentum de cada disco tras el choque es

$$\overrightarrow{p_1} = -\frac{1}{5}p\hat{\imath} \quad \overrightarrow{p_2} = \frac{3}{5}p\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{5}p\hat{\jmath} \quad \overrightarrow{p_3} = \frac{3}{5}p\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{5}p\hat{\jmath}$$

3) Como el resorte solo realiza trabajo en el eje y, conservamos la energía en este eje

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$2\frac{1}{2m}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}p\right)^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$y = \frac{p}{5}\sqrt{\frac{6}{mk}}$$

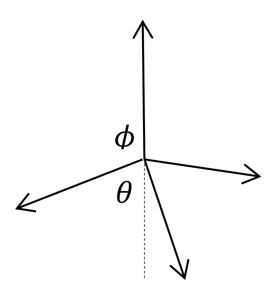
• Problema 9: Autoría de Rodrigo Sabaj

Considere una partícula inestable y en reposo, la cual explota en 4 pedazos iguales. Determine el ángulo que forma el vector velocidad de cada trozo con cualquiera de los otros 3.

Conservando el momentum lineal

$$\overrightarrow{P_i} = \overrightarrow{P_f}$$

$$0 = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4}$$



Consideremos una partícula en el eje vertical. Su momentum lineal debe ser anulado por las componentes del momentum de las otras 3 partículas, así, considerando que cada partícula tiene una masa m y sale disparada con rapidez v se cumple

$$mv = 3mv\cos(\theta)$$

donde θ es el angulo entre el vector y el eje vertical que se muestra en la figura, luego

$$\cos(\theta) = \frac{1}{3}$$

$$\theta = 70.5°$$

Además, se cumple que

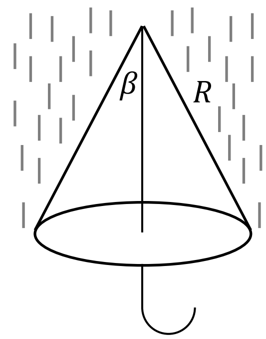
$$\theta + \phi = 180°$$

Así, el ángulo entre los vectores es

$$\phi = 180° - 70.5° = 109.5°$$

• Problema 10: Pregunta 2, control 2 Sistemas Newtonianos, semestre primavera 2011.

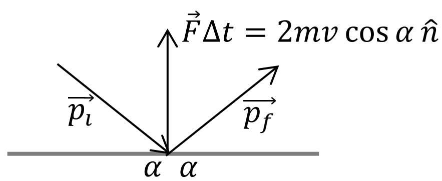
Considere un paraguas cónico caracterizado por la longitud de sus varillas R y su ángulo de apertura β. Suponga que una persona sujeta el paraguas durante una granizada, donde la masa de cada granizo es m, la velocidad de impacto es v y el número de granizos por unidad de volumen es n. Suponga además que los granizos rebotan elásticamente luego de impactar al paraguas. Determine la fuerza adicional que hay que aplicar para sostener el paraguas durante la granizada.



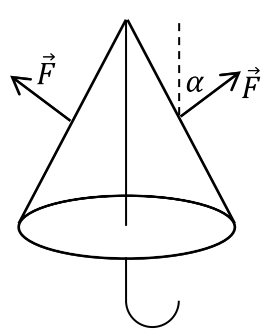
La segunda Ley de Newton la podemos expresar como

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Llevando esto a un choque elástico de una partícula, donde $|\vec{p_i}| = |\vec{p_f}| = mv$



Aplicando esto al paraguas



A partir de esto vemos que solo nos interesa la componente vertical de la fuerza pues la componente horizontal se cancela con la respectiva componente del granizo simétrico. Notar que el vector fuerza es normal a la superficie (a esto hace referencia el vector unitario $\hat{n}$).

Considerando todos los granizos que caen en un instante, la fuerza vertical es la proyección de la fuerza dibujada por la cantidad de granizos, es decir,

$$F_{neta}\Delta t = nV\ [2mv\cos(\alpha)]\cos(\alpha)$$

donde V es el volumen de granizos dicho instante tiempo dado por

$$V = A_{\perp}\ v\Delta t$$

con $A_{\perp}$ el área efectiva o área transversal (perpendicular) al impacto de los granizos, la cual equivale, claramente, al área basal del paraguas. Así

$$A_{\perp} = \pi(R\sin\beta)^2$$

Luego

$$F_{neta}\Delta t = n\,\pi(R\sin\beta)^2\ v\Delta t\ [2mv\cos(\alpha)]\cos(\alpha)$$

Además, se tiene que

$$\alpha + \beta = 90°$$

por lo que la fuerza adicional que se debe efectuar es

$$F_{neta} = n\,\pi(R\sin\beta)^2\ v\ [2mv\cos(90-\beta)]\cos(90-\beta)$$

$$F_{neta} = 2mv^2 n\pi R^2 \sin^4\beta$$

Unidad 5

Gravitación

• Problema 1

Se dice que un satélite es geoestacionario cuando permanece inmóvil sobre un determinado punto de nuestro globo. Para esto se necesita que la órbita del satélite se encuentre sobre el plano del Ecuador terrestre y que el periodo orbital sea sincrónico con la rotación de la Tierra. Calcule la altura de la órbita de este tipo de satélites, si el radio de la tierra es $R_T = 6400\ km$ *y su masa* $M_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$

La ecuación de movimiento de este satélite es

$$F_g = ma$$

$$\frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} = m\omega_T^2 (R_T + h)$$

Se debe destacar que la distancia a tomar para la fuerza gravitacional es desde el centro del planeta, esta misma distancia indica el centro de la circunferencia que describe el satélite.

Manipulando la igualdad

$$(R_T + h)^3 = \frac{GM_T}{\omega_T^2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega_T^2}} - R_T$$

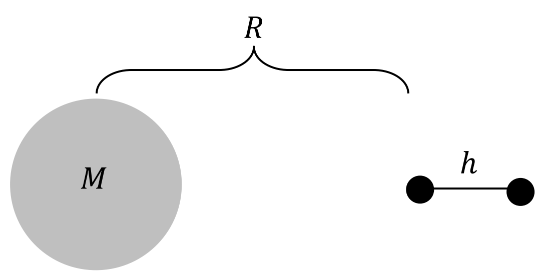
La rapidez angular con que rota la Tierra es

$$\omega_T = \frac{2\pi}{1\ \text{día}} = \frac{2\pi}{86400} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$$

y con $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, obtenemos el valor numérico para la altura

$$h = 35960\ km$$

• Problema 2



Dos partículas de igual masa m *se unen mediante una cuerda ideal de longitud* h*. El par es atraído gravitacionalmente por un planeta de masa* M*. La distancia entre el planeta y la partícula más cercana es* R*, con* $h \ll R$*.*

1) Despreciando la fuerza de atracción entre las dos partículas, calcule la tensión de la cuerda si ellas caen sobre el planeta con la cuerda estirada y dispuesta radialmente.

2) Ahora tome en cuenta la atracción gravitacional entre las dos masas, determine la masa de las partículas de tal forma que la tensión sea nula.

1) Como la cuerda es ideal, ambas masas caen con la misma aceleración, luego las ecuaciones de movimiento para las masas son

$$\frac{GMm}{R^2} - T = ma$$

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} + T = ma$$

Restando la primera de la segunda

$$2T = GMm\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}\right)$$

Utilizando la aproximación $(1+x)^n = 1 + xn$ para $x \ll 1$, pues $\frac{h}{R} \ll 1$, tenemos

$$T \approx \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2\left(1+\frac{2h}{R}\right)}\right) = \frac{GMm}{2R^2}\left(1 - \frac{R}{R+2h}\right) = \frac{GMm}{2R^2}\left(\frac{R+2h-R}{R+2h}\right)$$

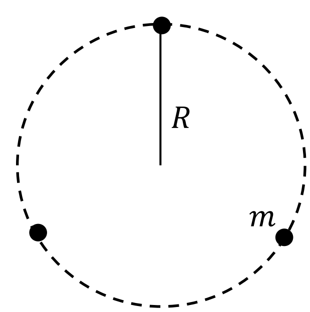
$$T \approx \frac{GMmh}{R^3}$$

2) Para que la tensión sea nula, el valor obtenido en la parte (a) debe ser igual a la magnitud de la fuerza gravitacional entre las partículas. De esta forma

$$T = \frac{GMmh}{R^3} = \frac{Gm^2}{h^2}$$

$$m = M\frac{h^3}{R^3}$$

• Problema 3: Ejercicio 6, primavera año 2000, Prof. Hugo Arellano.



Tres satélites idénticos de masa m orbitan manteniendo la configuración equilátera que se muestra en la figura. El radio de la órbita de cada satélite R y la interacción entre ellos es puramente gravitacional. Determine el periodo de órbita del sistema. Considere a cada satélite en movimiento circunferencial en torno a un centro común.

El problema es simétrico por lo que solo es necesario analizar un satélite.

La distancia d que separa a los satélites es, por teorema del coseno

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120$$

$$d^2 = 3R^2$$

Luego, el módulo de la fuerza que ejerce un satélite sobre otro es

$$F = \frac{Gmm}{d^2} = \frac{Gm^2}{3R^2}$$

Analicemos el satélite superior. El ángulo que forma la fuerza gravitacional con el radio de la circunferencia de la figura es 30°. Con esto, las ecuaciones de movimiento son

$$eje\ x: F\sin 30 - F\sin 30\ = ma = 0$$

$$eje\ y: -F\cos 30° - F\cos 30° =\ -ma_c$$

Desarrollando esta última expresión

$$2\frac{Gm^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{Gm}{R}$$

Además

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Así

$$T = \frac{2\pi R}{v}\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{Gm}{R}}} = 2\pi R\sqrt{\frac{\sqrt{3}R}{Gm}}$$

• Problema 4

El Principito logra saltar una altura máxima h (0.5 m) en la superficie terrestre. Si este personaje posa en lugar donde vive: el asteroide B612, de densidad igual a la de Tierra, el cual posee 3 volcanes, 2 de ellos activos, un rosa y muchas semillas de baobabs, y salta de la misma forma, El Principito logra escapar de él. Determine el radio de B612 para que esto sea posible, suponiendo que B 612 es esférico y mucho más masivo que El Principito. El radio R_T de Tierra es 6400 km.

Nota: El Principito es el personaje principal del libro del mismo nombre, Le Petit Prince, escrito por el aviador francés Antoine de Saint-Exupéry (Lyon, 29 de junio de 1900 – Mar Mediterráneo, 31 de julio de 1944).

Primero conservamos la energía en la Tierra, para determinar la energía con que salta El Principito

$$K + U_i = U_f$$

$$K - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{R_T + h}$$

$$K = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Ahora conservamos la energía para El Principito en el asteroide B612, imponiendo las condiciones para que nuestro personaje salte con la velocidad de escape

$$K + U_i' = K_f + U_f'$$

$$GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) - \frac{GM_B m}{R_B} = 0$$

$$M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = \frac{M_B}{R_B}$$

La masa de cada planeta está dada por

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Remplazando

$$\frac{4}{3}\pi {R_T}^3 \rho\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = \frac{\frac{4}{3}\pi {R_B}^3 \rho}{R_B}$$

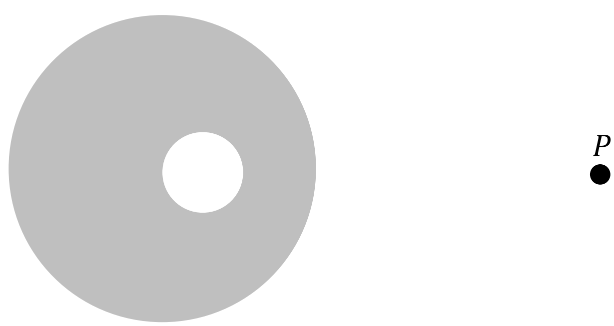
$$\frac{{R_T}^3 h}{R_T(R_T + h)} = {R_B}^2$$

$$R_B = R_T\sqrt{\frac{h}{R_T + h}} \approx \sqrt{R_T h}$$

Evaluando numéricamente se obtiene

$$R_B = 1788.85\ m$$

• Problema 5



Encuentre la aceleración de gravedad que experimenta una partícula ubicada en un punto P, situado a una distancia 3R de la superficie de una esfera sólida de densidad de masa ρ, que tiene una cavidad esférica de radio $\frac{R}{4}$ centrada a una distancia $\frac{R}{4}$ del centro de la esfera. El punto P y los centros de la esfera y la cavidad están alineados.

El campo gravitacional, al igual que la fuerza gravitacional, sigue el principio de superposición, por lo cual se cumple

$$g_{esfera\ solida} = g_{esfera\ con\ cavidad} + g_{cavidad\ con\ masa}$$

donde el último término hace referencia a una esfera masiva que se encuentra en el lugar de la cavidad. Luego

$$g_{esfera\ con\ cavidad} = g_{esfera\ solida} - g_{cavidad\ con\ masa}$$

Calculamos los campos para los cuerpos de la derecha de la ecuación. Para la esfera sólida, se tiene

$$g_{esfera\ solida} = \frac{GM}{(R+3R)^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{16R^2} = \frac{G\rho\pi R}{12}$$

Para la cavidad con masa

$$g_{cavidad\ con\ masa} = \frac{GM'}{\left(\frac{3R}{4}+3R\right)^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}{\left(\frac{15R}{4}\right)^2} = \frac{G\rho\pi R}{675}$$

Así

$$g_{esfera\ con\ cavidad} = \frac{G\rho\pi R}{12} - \frac{G\rho\pi R}{675} = G\rho\pi R\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{675}\right)$$

• Problema 6

Dos partículas de masas m y M estaban inicialmente en reposo, separadas por una distancia que consideramos infinita. Demuestre que en cualquier instante posterior, su velocidad relativa de acercamiento debida a la atracción gravitacional es:

$$\sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

donde d es la distancia entre ellas.

Por conservación de la energía se tiene

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$0 = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{GmM}{d}$$

Donde v y V son las velocidades de la masa m y M respectivamente. Notar que la energía potencial gravitacional se considera para un cuerpo masivo respecto al otro, por este motivo no se debe considerar dos veces; en otras palabras, con una sola masa no hay energía potencial a considerar, la cual aparece solo con 2 masas.

Como las partículas se acercan, la velocidad relativa es la suma de ambas velocidades, sin embargo, tenemos 2 incógnitas y solo una ecuación. La otra ecuación la obtenemos conservando el momentum lineal, pues no existen fuerzas externas actuando en el sistema.

$$\vec{p_i} = \vec{p_f}$$

$$0 = (mv - MV)\hat{\imath}$$

Despejando V y reemplazando en la primera ecuación

$$V = \frac{m}{M}v$$

$$\frac{2GMm}{d} = mv^2 + M\left(\frac{m}{M}v\right)^2$$

$$\frac{2GMm}{d} = mv^2 + \frac{m^2}{M}v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM^2}{d(M+m)}}$$

pudiéndose obtener V

$$V = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2GM^2}{d(M+m)}} = \sqrt{\frac{2Gm^2}{d(M+m)}}$$

Finalmente, la velocidad relativa es la suma de las velocidades pues los cuerpos se acercan

$$v_{rel} = v + V = M\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}} + m\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}} = (M+m)\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}}$$

$$v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(M\ +\ m)}{d}}$$

• Problema 7

Demuestre la 3ra Ley de Kepler para órbitas circulares y determine el valor de la constante de Kepler.

Como la única fuerza que actúa es la gravitacional, se tiene

$$F_g = ma$$

$$\frac{GM_Sm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

donde v es la velocidad lineal del planeta, R el radio de la órbita, m la masa del planeta, M_S la masa del Sol y G la constante gravitacional.

Para una órbita circunferencial se cumple

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

donde T es el periodo con que orbita el planeta. Remplazando en la ecuación anterior previamente simplificada

$$\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{GM_S}{R}$$

De esta forma

$$\frac{T^2}{R^3} = K = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

• Problema 8

El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas, lo que significa que las masas M de las dos estrellas son iguales. Si la velocidad orbital de cada estrella es v y el periodo de cada una es de T, calcule la masa de cada estrella. Encuentre la energía total de este sistema.

Sea D la distancia que separa a las estrellas y M la masa de cada estrella. La ecuación de movimiento para cada estrella es

$$\frac{GM^2}{D^2} = Ma = M\frac{2v^2}{D}$$

donde se usó el hecho que el radio de la circunferencia que describe cada planeta es la mitad de la distancia entre ambos.

Además, en un periodo, cada planeta describe una circunferencia, por lo que se cumple

$$vT = 2\pi\frac{D}{2}$$

$$D = \frac{vT}{\pi}$$

Usando la 3ra Ley de Kepler, tenemos

$$\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$D = 2\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Simplificando la ecuación de movimiento y remplazando esto

$$\frac{GM}{D} = 2v^2$$

$$M = \frac{2v^2D}{G} = \frac{2v^2}{G}2\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

$$M^3 = \frac{2^4 v^6}{G^3} \frac{GM}{4\pi^2} T^2$$

$$M = \frac{2v^3 T}{\pi G}$$

La energía del sistema es

$$E = K + U = 2\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GMM}{D}$$

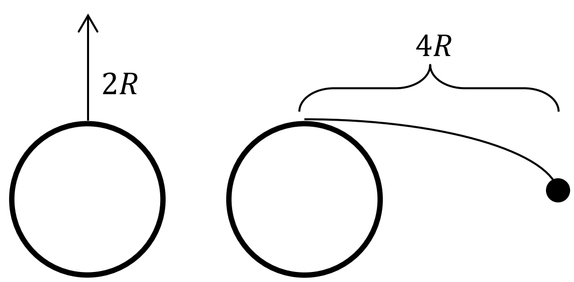
Notemos que solo la energía cinética se multiplica por 2 ya que la energía potencial gravitacional es entre ambos cuerpos, de forma tal que si solo tuviésemos un cuerpo, la fuerza gravitacional sería nula. Remplazando el valor obtenido para la masa

$$E = \frac{2v^5 T}{\pi G} - G\left(\frac{2v^3 T}{\pi G}\right)^2 \frac{\pi}{vT}$$

$$E = \frac{2v^5 T}{\pi G} - \frac{4v^5 T}{\pi G} = -\frac{2v^5 T}{\pi G}$$

• Problema 9: Pregunta 3, control 3, semestre otoño 2012

Dos satélites idénticos son lanzados desde el polo norte. La masa de la Tierra la denominamos M y su radio R. Uno de ellos es lanzado verticalmente y alcanza una altura máxima de 2R, medida desde el centro de la tierra. El otro satélite se lanza tangencialmente y en el punto que alcanza su máximo alejamiento se encuentra a una distancia 4R del centro de la tierra. Calcule la velocidad de lanzamiento de cada satélite.



Para el primer satélite, conservamos la energía

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

$${v_1}^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Repetimos la acción para el segundo satélite

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}m{v_{i_2}}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m{v_{f_2}}^2 - \frac{GMm}{2R}$$

Dado que tenemos dos incógnitas, recurrimos a la conservación del momentum angular en los puntos donde el vector posición es perpendicular a la velocidad, es decir, cuando se lanza y en su punto más lejano

$$l_i = l_f$$

$$m{v_i}_2 R_T = m{v_f}_2 4R_T$$

$${v_f}_2 = \frac{{v_i}_2}{4}$$

Reemplazando en la ecuación de energía

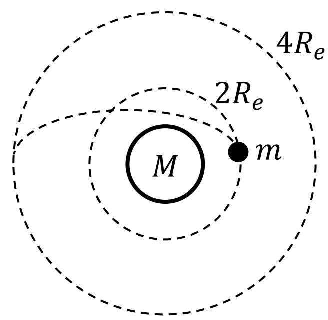
$$\frac{1}{2}m{v_i}_2^{\,2} - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{{v_i}_2}{4}\right)^2 - \frac{GMm}{4R}$$

$${v_i}_2^{\,2} - \left(\frac{{v_i}_2}{4}\right)^2 = \frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{4R}$$

$$\frac{15}{16}{v_i}_2^{\,2} = \frac{3}{2}\frac{GM}{R}$$

$${v_i}_2 = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{GM}{R}}$$

• Problema 10: Pregunta 3, control 2 Mecánica, semestre verano 2012.



Un vehículo está en órbita circular alrededor de la tierra. La masa del vehículo es m y el radio de la órbita es $2R_e$ donde R_e es el radio de la tierra. Se desea transferir el vehículo a una órbita circular de radio $4R_e$ usando una órbita de transferencia elíptica. La constante de gravitación es G y la masa de la tierra es M.

1) Encuentre el cambio de velocidad que se requiere para poner el vehículo espacial en órbita de transferencia
2) Encuentre el cambio de velocidad que se requiere para pasar el vehículo espacial desde la órbita elíptica a la órbita circular de radio $4R_e$
3) Calcule el tiempo que demora el viaje del vehículo espacial

En primer lugar se obtienen las rapideces para las órbitas circulares a través de la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

$$-\frac{GMm}{(2R_e)^2} = -\frac{m{v_2}^2}{2R_e}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{2R_e}}$$

Análogamente

$$v_4 = \sqrt{\frac{GM}{4R_e}}$$

Para la órbita elíptica se conserva la energía y el momentum angular para el perihelio y el afelio:

$$E_p = E_a$$

$$\frac{1}{2}m{v_p}^2 - \frac{GMm}{2R_e} = \frac{1}{2}m{v_a}^2 - \frac{GMm}{4R_e}$$

$${v_p}^2 - v_a^2 = \frac{GM}{2R_e}$$

$$l_p = l_a$$

$$2R_e v_p m = 4R_e v_a m$$

$$v_p = 2v_a$$

Reemplazando la segunda expresión en la primera:

$$(2v_a)^2 - v_a^2 = \frac{GM}{2R_e}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{6R_e}}$$

Entonces

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{3R_e}}$$

Así, los cambios de rapidez son:

$$\Delta v_p = v_p - v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{3R_e}} - \sqrt{\frac{GM}{2R_e}}$$

$$\Delta v_a = v_4 - v_a = \sqrt{\frac{GM}{4R_e}} - \sqrt{\frac{GM}{6R_e}}$$

Utilizando la 3ra ley de Kepler y viendo que el semieje valor toma el valor de $a = 3R_E$, se calcula el periodo de la órbita elíptica

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{27{R_e}^3}{GM}}$$

El tiempo de viaje es solo la mitad del periodo, así

$$t_v = \frac{T}{2} = 3\pi\sqrt{\frac{3{R_e}^3}{GM}}$$