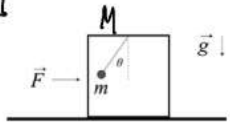
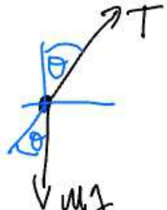
P4 Una caja de masa M es impulsada horizontalmente por una fuerza $\vec{F}$ sobre una superficie rugosa de coeficiente cinético μ_c. Dentro de la caja hay una masa m que cuelga de una cuerda inextensible e ideal. En equilibrio, la cuerda formará un ángulo α constante con la vertical. Calcule este ángulo, como muestra la figura.

$\boxed{\theta = \alpha}$

1 pto DCL m



DCL: mg



$\theta = cte \Rightarrow y = cte$

1 pto T

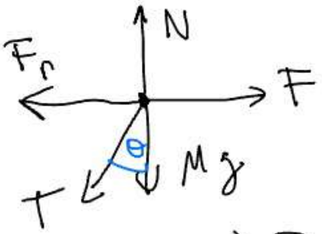
$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a}$

$\hat{i})\quad T\sin\theta = m\cdot a$

$\hat{j})\quad T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow \boxed{T = \dfrac{mg}{\cos\theta}} \Rightarrow a = \dfrac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\dfrac{\sin\theta}{\cancel{m}}$

$\boxed{a = g\tan\theta}$

Mg



$\hat{j})\quad N - T\cos\theta - Mg = 0$

$\Rightarrow \boxed{N = Mg + T\cos\theta}$

1 pto a

1 pto DCL M

$\Rightarrow F_r = \mu_c N = \mu_c[Mg + T\cos\theta]$

1 pto Fr

$\hat{i})\quad F - F_r - T\sin\theta = M\cdot a$

$F - \mu_c[Mg + T\cos\theta] = M\cdot a = Mg\tan\theta$

$F - \mu_c\left[Mg + \dfrac{mg}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta}\right] = Mg\tan\theta$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{F}{Mg} - \mu_c\left[1 + \frac{m}{M}\right]}$$

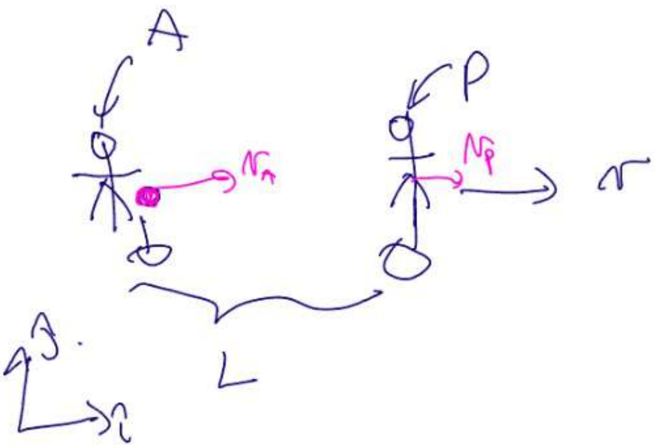
1 pto θ,α

P2 Pedro y Alicia juegan con una pelota en el pasillo de un tren en movimiento, haciéndola deslizar a ras de piso a lo largo del vagón. Pedro se ubica en la parte delantera del vagón y Alicia en la parte trasera. La distancia entre ellos es L. Observadores fijos en tierra miden la velocidad de la pelota lanzada por Alicia y Pedro, obteniendo v_A y v_P, respectivamente. En ambos casos la pelota resulta moviéndose en el mismo sentido del tren.

a) (2.0 puntos) Suponiendo que Pedro y Alicia lanzan la pelota con igual rapidez respecto a ellos mismos (que denotaremos v_0), determine v_0 y la velocidad V del tren.

b) (2.0 puntos) Ahora Alicia lanza la pelota a Pedro, esta vez en forma de proyectil con rapidez v_0 encontrada en (a). Determine el ángulo de lanzamiento de la pelota con respecto a la horizontal relativo al tren.

c) (2.0 puntos) Determine la mínima altura del tren para que, con este lanzamiento, la pelota no toque el techo del tren.



$$v_A = v + v_0 \qquad (\Delta)$$

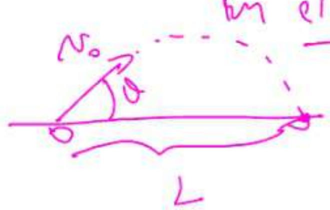
$$v_p = v - v_0 \qquad (\square)$$

a) $(\Delta)+(\square) \Rightarrow v_A + v_p = 2v \Rightarrow v = \dfrac{v_A + v_p}{2}$

$(\Delta)-(\square) \Rightarrow v_A - v_p = 2v_0 \Rightarrow v_0 = \dfrac{v_A - v_p}{2}$

2 pto

b) En el tren



Como $y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \dfrac{g t^2}{2}$

$x(t) = v_0 \cos\theta\, t$

$y(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \dfrac{2 v_0 \sin\theta}{g}$

$\Rightarrow x(t^*) = \dfrac{2 v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = L$

$\Rightarrow \sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$ $\quad = \dfrac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) = L$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \dfrac{L g}{v_0^2}$

2 pto

c) $y_{máx}$ cuando $v_y = 0$

$v_y(t) = v_0 \sin\theta - g t =$

$v_y(t') = 0 \Rightarrow t' = \dfrac{v_0}{g} \sin\theta.$

$$y(t') = v_0 \sin\theta \frac{v_0}{g} \sin\theta - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2\theta$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta = H$$

$$\Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{L g}{v_0^2}\right)$$

2 pto

$$\Rightarrow \quad \Delta t + t_{sonido} < t'$$

$$\Delta t + \frac{h}{c} < \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

i.e. $$\frac{h}{c} - \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h} + \Delta t < 0.$$

i.e.

$h_{min} \Rightarrow$ $$\sqrt{h} = \frac{\sqrt{\frac{2}{g}} \pm \sqrt{\frac{2}{g} - \frac{4\Delta t}{c}}}{2/c}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{c}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4}^{2}\Delta t}{c}}\right.$$

$$1 \pm \left(1 - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}g\frac{\Delta t}{c}\right)$$

$$\sqrt{h} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{c}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = \frac{\overset{10^3/3}{\cancel{340}}\,[m\,s^{-1}]}{\underset{2.2}{\sqrt{5}}\,[m\,s^{-2}]} = \frac{10^3\sqrt{m}}{6.6} = 15 \times 10^{[illegible]} = 100\sqrt{m} \quad \frac{100}{15} \\ \sqrt{\frac{2}{g}}\cancel{2}g\frac{\Delta t}{\cancel{c}} = \sqrt{2g}\,\Delta t = \sqrt{20}\,[m\,s^{-2}]\,0.1\,[s] = 4.5 \times 0.1\sqrt{m} \approx 0.5\sqrt{m} \end{cases}$$

1.5 pts

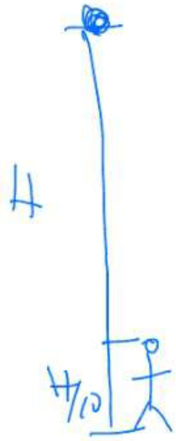
$$\Rightarrow h = \begin{cases} \overset{225}{\cancel{15 \times 15}} \times 10^2 \\ 22500\,[m] \\ 0.025\,[m] \end{cases}$$

22500 [m] → caso muy lejos

0.025 [m] → caso muy cerca

→ 1.5 pts por hacer suposiciones q' tengan sentido e intento d resultado

P3 Una persona está parada bajo un enorme pino insigne, que posee unos frutos leñosos, llamados piñas. En un cierto instante, una piña ubicada a una altura H sobre la persona (medida desde el nivel del suelo) se desprende del árbol desde el reposo y comienza a caer libremente. Al momento de desprenderse del árbol, la piña genera un crujido, cuyo sonido que viaja en todas las direcciones a velocidad c. Considere que el tiempo de reacción promedio de un ser humano a un estímulo cualquiera es ΔT. Suponga que la persona escucha el sonido, mueve su cabeza hacia arriba, identifica a la piña que viene cayendo como la causante del ruido y da a su cuerpo la orden de moverse.



a) (1.5 puntos) Si la persona no pudiese oír el crujido y no se moviera, calcule el tiempo que demoraría la piña en impactarla. Considere una persona de $H/10$ de altura.

b) (1.5 puntos) Si la persona pudiese oír crujido, estime el tiempo mínimo que le tomaría a la persona en moverse para evitar el impacto desde que se desprende la piña.

c) (1.5 puntos) Estime el tiempo máximo que puede permanecer la persona en la trayectoria de la piña, antes de moverse, para que ésta no la impacte

d) (1.5 puntos) ¿Desde qué altura máxima debería caer la piña para que siempre impactara a la persona?

Puede usar valores conocidos para sus respuestas: $c \sim 350$ m/s, $H \sim 20$ m, $\Delta T \sim 0.1$ s, $g \sim 10$ m/s ^{2}.

a.) $y_{piña}(t) = H + \cancel{v_0 t} - \frac{gt^2}{2}$.

t' en impacto $\longrightarrow y(t') = \frac{H}{10} = H - \frac{gt'^2}{2} \Rightarrow t'^2 = \frac{2}{g} H \cdot \frac{9}{10}$

1.5 pto

$t' = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{H}{g}}$.

$\Rightarrow t' = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{20[m]}{10[m\,s^{-2}]}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}[s]$

$\sqrt{2} \sim 1.4 \sim \frac{2\times 7}{10}$ $\quad = \frac{\cancel{3}\times 1.4}{2.2}[s]$

$\sqrt{5} \sim 2.2 \sim \frac{3\times 7}{10}$

$\Rightarrow t' \sim 2[s]$

b.) tiempo crujido.

$t_{sonido} = \frac{H\cdot\frac{9}{10}}{c} = \frac{20[m]\times\frac{9}{10}}{350[m/s]}$

$\simeq 0.05[s]$

$\Delta t \sim 0.1[s]$

$\Rightarrow t_{mov} = \Delta t + t_{sonido}$

$\simeq 0.15[s]$

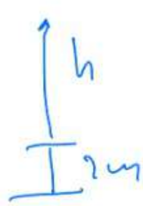
1.5 pto

c.) Persona debería moverse en $t' - t_{mov} = (2 - 0.15)[s]$

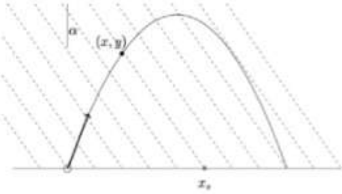
$= 1.85[s]$

1.5 pto

d.) Para q' siempre impacte, dejamos de suponer que la altura es $\frac{H}{10}$, y desde la cabeza hacia arriba consideramos h.



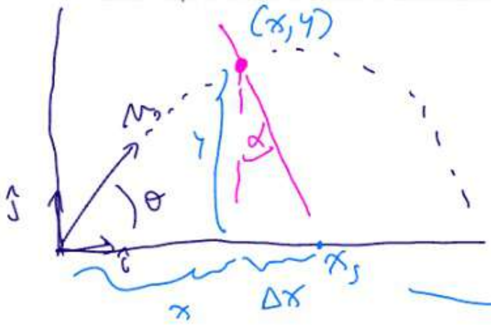
P1 Un arquero lanza una flecha con rapidez v_0, formando un ángulo θ con respecto a la horizontal. En su vuelo la flecha proyecta su sombra sobre el piso plano y horizontal. Suponga que la trayectoria de la sombra es rectilínea, lo que se logra cuando el arquero le da la espalda al Sol. El ángulo de los rayos solares con respecto a la vertical es α, como se ve en la figura.



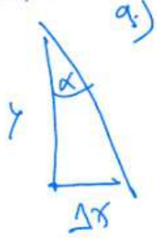
a) (2.0 puntos) Determine la coordenada x_s de la sombra de la flecha sobre el piso, cuando las coordenadas de la flecha son (x, y) (suponga flecha puntual).

b) (2.0 puntos) Determine la posición de la sombra en función del tiempo: $x_s = x_s(t)$.

c) (2.0 puntos) Para el caso particular $\theta = \alpha = \pi/4$, determine y grafique $x_s(t) vs t$, identificando aquel instante en que la velocidad de la sombra se anula instantaneamente. Interprete.



a.)



$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{y} \Rightarrow \underline{\Delta x = y\tan\alpha}$

$x_s = x + \Delta x$

$\boxed{x_s = x + y\tan\alpha}$

2 pto

b) $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$a_x = 0$
$v_{0x} = v_0 \times \cos\theta$
$x_0 = 0$

$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + a_x \frac{t^2}{2}$
$= \underline{v_0 \cos\theta\, t}$

$a_y = -g$
$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\theta$
$y_0 = 0$

$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}$
$= \underline{v_0 \sin\theta\, t - \frac{g t^2}{2}}$

2 pto

$\Rightarrow y = 0$
$\Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$
$\Rightarrow = \frac{2 v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} v_0$

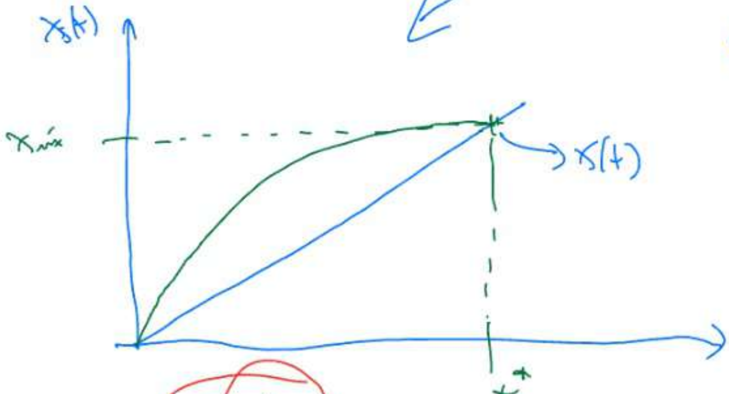
$\Rightarrow \underline{x_s(t) = v_0 \cos\theta\, t + \tan\alpha \cdot \left(v_0 \sin\theta\, t - \frac{g t^2}{2}\right)}$

c.) $\theta = \alpha = \pi/4 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta$
$= \underline{45°}$ $\tan\alpha = 1$

$\Rightarrow x_s(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} t + \frac{v_0}{\sqrt{2}} t - \frac{g t^2}{2}$

$\boxed{x_s(t) = t \times \left(\sqrt{2} v_0 - \frac{g t}{2}\right)}$

$\underline{x(t) = t \times \frac{v_0}{\sqrt{2}}}$



2 pto

Como parto con $\theta = 45°$, llegará al máximo con $\theta = -45°$, que es el ángulo del sol.

$v_x = v\cos\theta$
$v_y = v\sin\theta - gt$

$\Rightarrow$ la sombra llega con velocidad 0

$\Rightarrow v_s = v\cos\theta + \tan\alpha(v\sin\theta - gt)$
$\theta = \pi/4 = \alpha$ $= v\sqrt{2} - gt$
$\Rightarrow v_s = 0$ $t^* = \frac{v\sqrt{2}}{g}$ = tiempo cuando $\underline{y = 0}$