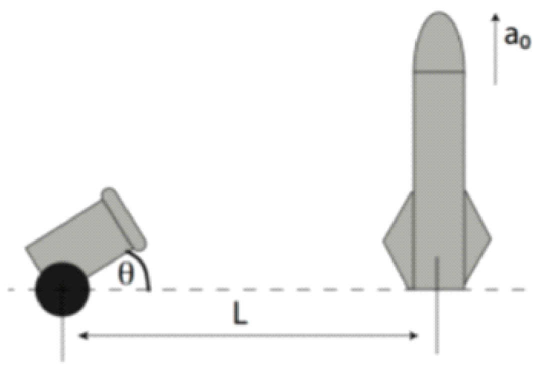
P1)



a) (a) ¿Cuál es la velocidad v_0 de la bala para que logre impactar el cohete?

* La velocidad ($\vec{v}$) de la bala es:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}, \quad \text{con} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

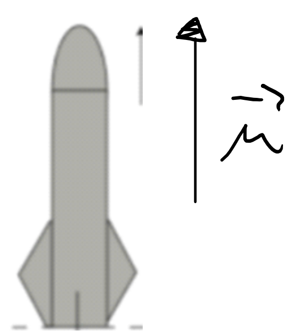
* v_{0x}, v_{0y} desconocidos.

* y una posición: $\vec{r}_b = r_x \hat{x} + r_y \hat{y}$

con $\{ r_{bx}(t) = v_{0x} \cdot t$ y $\{ r_{by}(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{g t^2}{2}$

* El cohete, por otra parte, tiene una velocidad vertical: ($\vec{u}$)

$\rightarrow \vec{u} = a_0 t \hat{y}$



* y una posición:

$$\left\{ \vec{r}_c = \frac{a_0 t^2}{2} \hat{y} \right.$$

* Cuando la bala llegue a L en $\hat{x}$, la posición vertical del cohete y la bala deben ser iguales.

1) ¿Cuándo llega a L en $\hat{x}$?

↳ La posición horizontal de la bala es $r_{bx}(t)$, e imponemos que en un tiempo t^* esta llegue a L.

$$\Rightarrow r_{bx}(t^*) = v_{0x} t^* \overset{!}{=} L.$$

$$\Rightarrow \left[t^* = L / v_{0x}. \right]$$

2) En t^* la bala y el cohete se encuentran verticalmente, es decir:

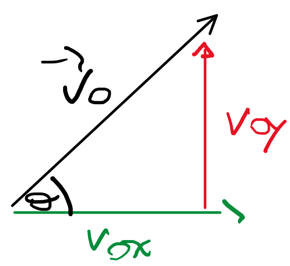
$$r_{by}(t^*) = r_{cy}(t^*)$$

$$\Rightarrow \quad v_{oy}\cancel{t^*} - \frac{g\,t^{*\cancel{2}}}{2} = \frac{e_0\,t^{*\cancel{2}}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v_{oy} = \frac{(g+e_0)\,t^*}{2} = \frac{(g+e_0)}{2}\,\frac{L}{v_{ox}} \qquad (A)$$

* El otro dato que se tiene es la inclinación θ.

* Descomponiendo $\vec{v}$ trigonometricamente:



$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{v_{oy}}{v_{ox}} = \tan\theta .} \qquad (B)$$

* Juntando (A) y (B):

$$v_{ox}\tan\theta = \frac{(g+e_0)}{2}\,\frac{L}{v_{ox}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{ox} = \left(\frac{(g+e_0)}{2}\,\frac{L}{\tan\theta}\right)^{1/2}} \qquad (C)$$

y reemplazando (C) en (B):

$$\left(\frac{(g+e_0)}{2}\,\frac{L}{\tan\theta}\right)^{1/2}\cdot\tan\theta = v_{oy}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{oy} = \left(\frac{(g+e_0)\,L\cdot\tan\theta}{2}\right)^{1/2}}$$

* Que son las componentes del $\vec{v}_0$.

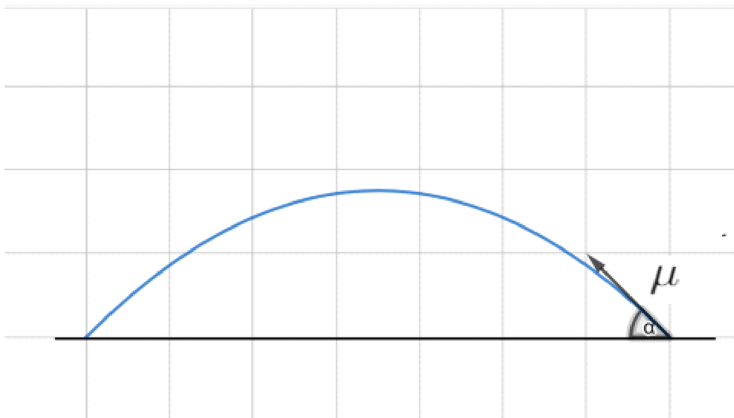
(b) ¿Cuánto tiempo recorre la bala en el disparo?

* Finalmente reemplazando V_{0x} en t^*:

$$t^* = \frac{L}{\left(\frac{(g + e\theta)}{2} \, \frac{L}{\tan\theta} \right)^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{(g + e\theta)}{2} \, \frac{1}{L \tan\theta} \right)^{-1/2}$$

P2)



(a) Determine el ángulo α_m para el cual el alcance es máximo.

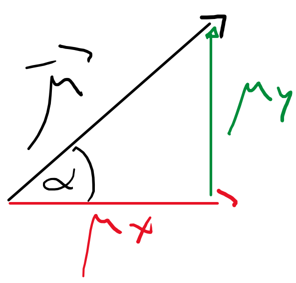
* La posición vertical y horizontal es:

$$y = \mu_y t - \frac{g t^2}{2} \quad ; \quad x = \mu_x t$$

con $\vec{\mu} = \mu_x \hat{x} + \mu_y \hat{y}$.

→ Se pide el ángulo tal que x es máx.

* Se tiene para la velocidad:



$$\mu_y = \mu \,\text{sen}\,\alpha$$
$$\mu_x = \mu \cos\alpha.$$

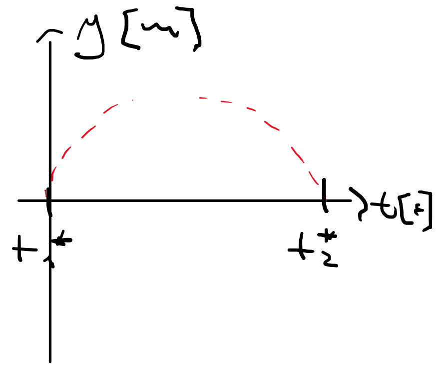
* El alcance se da cuando la partícula cae. $(y=0)$

* Calculando el tiempo en que esto sucede:

$$y(t^*) = 0 = \mu_y t^* - \frac{g t^{*2}}{2}$$

$$\Rightarrow t^*\left(\mu_y - \frac{g t^*}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow t_1^* = 0 \quad \wedge \quad t_2^* = \frac{2\mu_y}{g}$$



* Reemplazando en x:

$$x = \mu_x \cdot \frac{2\mu_y}{g} = \frac{2\mu^2 \,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{\mu^2}{g}\,\text{sen}(2\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(\alpha) = \frac{\mu^2}{g}\,\text{sen}(2\alpha)} \rightarrow \text{Alcance de } x.$$

→ x máx se da en $2\alpha = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi/4}$

$\rightarrow$ x máx se da en $2\alpha = \pi/2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \pi/4}$

(b) Demuestre que dado un alcance $D < D_{max}$ existen 2 ángulos en los que el alcance es el mismo.

* Dado $x = \frac{\mu^2}{g}\,\text{sen}(2\alpha) = D$.

La función $\text{sen}(\alpha)$ tiene 2 soluciones para valores no óptimos.

$$\Rightarrow \quad \text{sen}(2\alpha) = \frac{Dg}{\mu^2} \quad / \text{arcsen}(\ )$$

$$2\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{Dg}{\mu^2}\right) + n\pi$$

$$\boxed{\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{Dg}{\mu^2}\right) + n\frac{\pi}{2}}$$

(c) Encuentre la rapidez de la partícula en función de la distancia recorrida en el eje x y los datos del problema.

* Ahora x e y son variables conocidas.

$$\Rightarrow \quad x = \mu_x \cdot t \quad e \quad y = \mu_y t - \frac{g t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_x = \mu \cos\alpha = x/t} \quad (1)$$

* Por último conozcamos t:

→ De la ec. para y:

$$-\frac{g}{2} t^2 + \mu_y t - y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_\pm = \frac{-\mu_y \pm \left(\mu_y^2 - 4\left(-\frac{g}{2}\right)y\right)^{1/2}}{-g}} \quad (2)$$

* Como $t > 0 \Rightarrow t_+$ es variable física.

* Reemplazando (2) en (1):

$$\boxed{\mu \cos\alpha = \frac{x}{\left(\frac{-\mu\,\text{sen}\alpha + \left(\mu^2 \text{sen}^2\alpha - 4\left(-\frac{g}{2}\right)y\right)^{1/2}}{-g}\right)}} \quad ✓$$

↳ Ec. implícita para μ. (Propuesto)