

Auxiliar 15

Momentum y Centro de masa

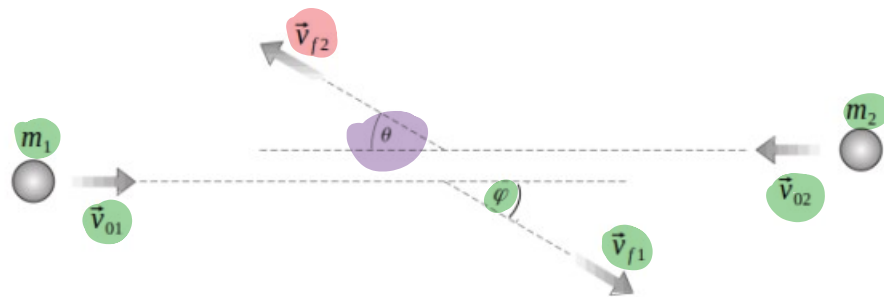
Profesor: Ignacio Bordeu

Auxiliares: Fabián Corvalán, Pablo González

Ayudantes: Fernanda Padró, Sofía Contreras

P1.

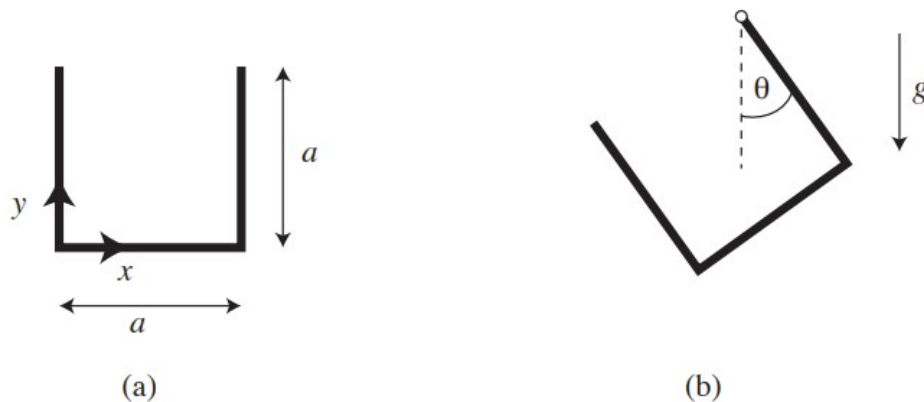
Un asteroide de **masa m_1** se dirige a la tierra con **velocidad $\vec{v}_01$** . Científicos de la NASA han decidido desviarlo de su trayectoria usando un proyectil de **masa m_2** , el cual viaja con **velocidad $\vec{v}_02$** . El proyectil choca con el asteroide fuera de su centro, de manera que ambos objetos rebotan como se muestra en la figura. Considere que antes del choque, ambos objetos viajan con velocidad horizontal. Después del choque, el asteroide rebota formando un **ángulo φ** con la horizontal. Desprecie cualquier efecto gravitatorio.



- ¿Cuál es la **velocidad final del proyectil m_2** si el asteroide **m_1** tiene una rapidez **v_{f1}** después del **choque**?
- Usando el resultado anterior, discuta los límites en que (i) el proyectil es mucho más masivo que el asteroide, $m_2 \gg m_1$ y en que (ii) el proyectil tiene la misma masa y rapidez inicial que el asteroide, $m_2 = m_1$ y $v_{01} = v_{02}$.

P2.

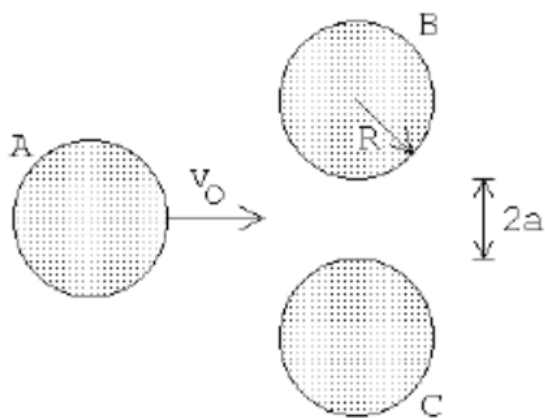
Considere el objeto de la figura (a), formado por tres barras delgadas idénticas de longitud a y masa m cada una, soldadas entre sí en ángulos rectos.



- (a) Determine la posición del centro de masa del objeto, en el sistema de coordenadas cartesianas (x, y) mostrado en la figura (a).
- (b) El objeto se cuelga de un clavo sin roce que pasa por uno de sus extremos, como se muestra en la figura (b). Si el objeto se encuentra en equilibrio, determine el ángulo θ .

P3. PROPUESTO

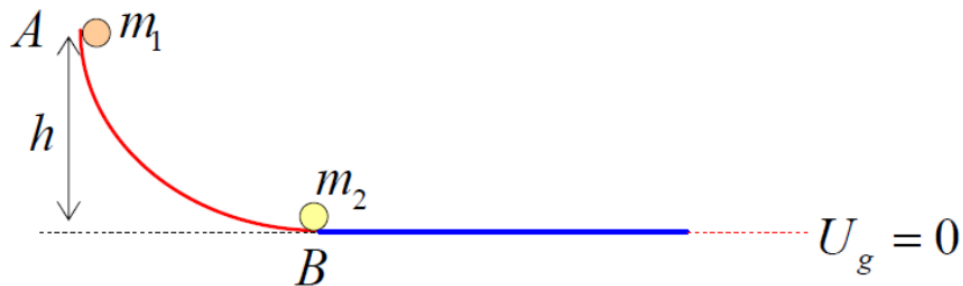
Sobre un plano liso se encuentran tres discos iguales (de radio R y masa M). El disco A , que incide con velocidad v_0 , choca simultánea y elásticamente con los discos B y C . Los discos B y C inicialmente se encuentran en reposo con los centros separados en una distancia $2R + 2a$. Suponga que no hay roce entre los bordes de los discos cuando están en contacto. Encuentre la velocidad del disco A después de la colisión.

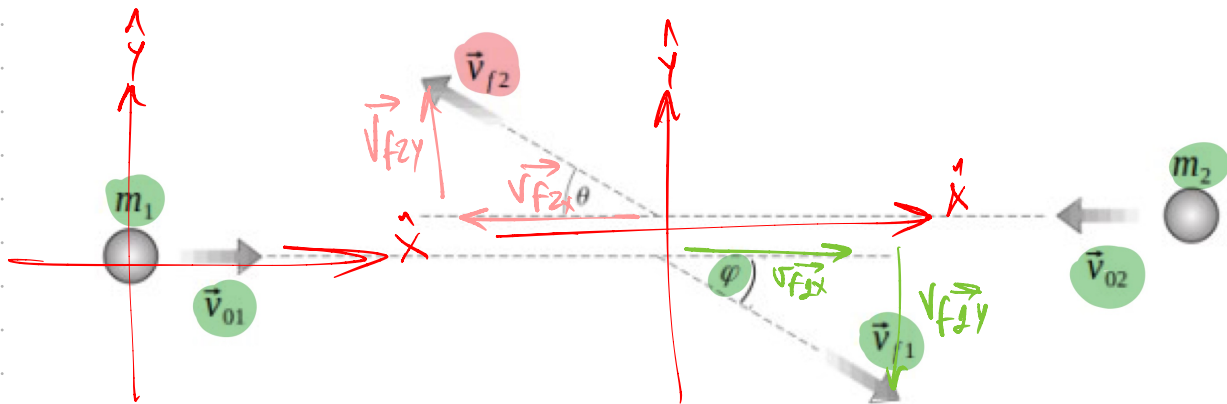


P4. PROPUESTO

Desde una altura h se deja deslizar un bloque de masa m_1 por un riel de roce despreciable. El bloque de masa m_1 llega a la parte de abajo del riel y choca con un bloque de masa m_2 , el cual se encuentra en reposo, tal como se muestra en la figura. Calcule la velocidad de cada bloque luego de la colisión. Estudie los siguientes casos:

- (a) $m_1 = m_2$
- (b) $m_1 > m_2$
- (c) $m_1 < m_2$
- (d) $m_1 \gg m_2$
- (e) $m_1 \ll m_2$





$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_{01} + m_2 \cdot \vec{v}_{02}$$

$$\vec{v}_{f2} = v_{f2x} \hat{x} - v_{f2y} \hat{y}$$

$$\vec{v}_{f2} = \cos \varphi \cdot v_{f2} \hat{x} - \sin \varphi \cdot v_{f2} \hat{y}$$

$$\vec{v}_{f2} = -v_{f2x} \hat{x} + v_{f2y} \hat{y}$$

$$\vec{P}_0 = m_1 \cdot v_{01} \hat{x} + m_2 \cdot -v_{02} \hat{x} + 0 \hat{y}$$

$$\vec{P}_f = m_1 \cdot \vec{v}_{f1} + m_2 \cdot \vec{v}_{f2}$$

$$\vec{P}_f = m_1 \cdot (\cos \varphi \cdot v_{f1} \hat{x} - \sin \varphi \cdot v_{f1} \hat{y}) + m_2 \cdot (-v_{f2x} \hat{x} + v_{f2y} \hat{y})$$

Haciendo conservación de momentum en cada componente ($\hat{x}$ e $\hat{y}$):

$$P_{0x} = P_{fx}$$

$$\hat{x} \quad m_1 \cdot v_{01} - m_2 \cdot v_{02} = m_1 \cos \varphi \cdot v_{f1} - m_2 \cdot v_{f2x}$$

$$P_{0y} = P_{fy}$$

$$0 = -m_1 \sin \varphi v_{f1} + m_2 \cdot v_{f2y}$$

$$\bullet v_{f2x} \Rightarrow m_1 \cdot v_{01} - m_2 \cdot v_{02} - m_1 \cos \varphi \cdot v_{f1} = -m_2 v_{f2x}$$

$$-\frac{m_1 v_{01}}{m_2} + \frac{\cancel{m_2} v_{02}}{\cancel{m_2}} + \frac{m_1 \cos \varphi \cdot v_{f2}}{m_2} = v_{f2x}$$

$$\frac{m_1}{m_2} (-v_{01} + \cos \varphi v_{f2}) + v_{02} = v_{f2x}$$

$$\bullet v_{f2y} \Rightarrow m_1 \sin \varphi v_{f2} = m_2 v_{f2y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} \sin \varphi v_{f2} = v_{f2y}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{f2} = -v_{f2x} \hat{x} + v_{f2y} \hat{y}$$

$$= -\left(\frac{m_1}{m_2} (-v_{01} + \cos \varphi v_{f2}) + v_{02} \right) \hat{x} + \frac{m_1}{m_2} \sin \varphi v_{f2} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{f2} = \left(\frac{m_1}{m_2} (v_{01} - \cos \varphi v_{f2}) - v_{02} \right) \hat{x} + \frac{m_1}{m_2} \sin \varphi v_{f2} \hat{y}$$

(b) Usando el resultado anterior, discuta los límites en que (i) el proyectil es mucho más masivo que el asteroide, $m_2 \gg m_1$ y en que (ii) el proyectil tiene la misma masa y rapidez inicial que el asteroide, $m_2 = m_1$ y $v_{01} = v_{02}$.

$$\Rightarrow \vec{v}_{f2} = \left(\frac{m_1}{m_2} (v_{01} - \cos \varphi v_{f2}) - v_{02} \right) \hat{x} + \frac{m_1}{m_2} \sin \varphi v_{f2} \hat{y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} \approx 0 \Rightarrow \vec{v}_{f2} = -v_{02} \hat{x}$$

- (b) Usando el resultado anterior, discuta los límites en que (i) el proyectil es mucho más masivo que el asteroide, $m_2 \gg m_1$ y en que (ii) el proyectil tiene la misma masa y rapidez inicial que el asteroide, $m_2 = m_1$ y $v_{01} = v_{02}$.

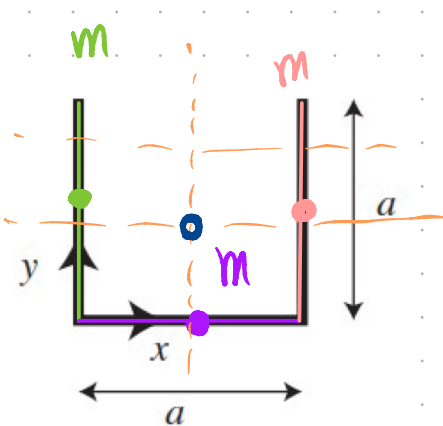
ii) $\Rightarrow \vec{V}_{f2} = \left(\frac{m_1}{m_2} (V_{01} - \cos \varphi V_{f2}) - V_{02} \right) \hat{x} + \left(\frac{m_1}{m_2} \sin \varphi V_{f2} \right) \hat{y}$

$\frac{m_1}{m_2} = 1 \Rightarrow \vec{V}_{f2} = (\cancel{V_{01}} - \cos \varphi V_{f2} - \cancel{V_{02}}) \hat{x} + 1 \sin \varphi V_{f2} \hat{y}$

$\Rightarrow \vec{V}_{f2} = -\cos \varphi V_{f2} \hat{x} + \sin \varphi V_{f2} \hat{y}$

"Choque simétrico"

P2)



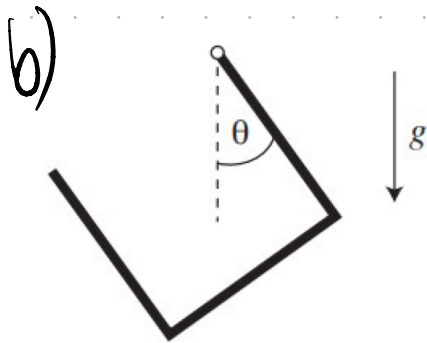
$\vec{V}_{cm} = \sum \frac{m_i \cdot \vec{v}_i}{m_i}$

$\vec{X}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{x}_i}{m_{Total}}$

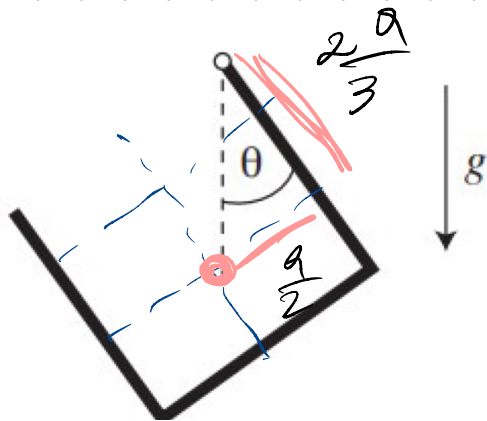
$X_{cm} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot \frac{a}{2} + m \cdot a}{m + m + m} = \frac{m \cdot a + 2m \cdot a}{3m} = \frac{3m \cdot a}{3m} = \frac{a}{2}$

$Y_{cm} = \frac{m \cdot \frac{a}{2} + m \cdot 0 + m \cdot \frac{a}{2}}{m + m + m} = \frac{2 \cdot m \cdot a}{3m} = \frac{a}{3}$

las coordenadas del centro de masa son $(X_{cm}, Y_{cm}) = (a/2, a/3)$



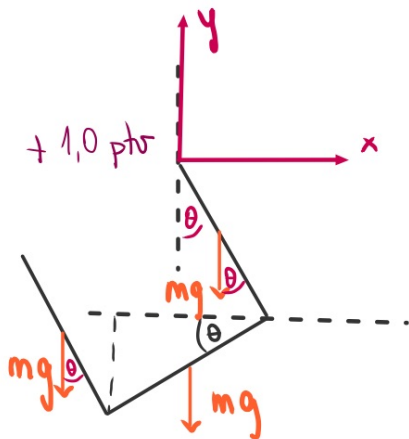
la única manera de que el torque del peso con respecto al clavo sea nulo es que el centro de masa se ubique exactamente debajo del clavo



$$\tan \theta = \frac{a/2}{2a/3} = \frac{3}{4}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

El problema también se puede resolver de la siguiente manera.



$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau} &= \frac{a}{2} [\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}] \times (-mg \hat{y}) + \\ & \left[(a \sin \theta - \frac{a}{2} \cos \theta) \hat{x} - (a \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta) \hat{y} \right] \times (-mg \hat{y}) \\ & + \left[a (\sin \theta - \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta) \hat{x} - a (\cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta) \hat{y} \right] \times (-mg \hat{y}) = 0 \end{aligned}$$

+ 1,0 pto $\rightarrow \sum \vec{\tau} = 0$ correcta $\uparrow$

$$-\frac{amg}{2} \sin \theta - amg (\sin \theta - \frac{\cos \theta}{2}) + amg \left(-\frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \right) = 0$$

$$amg \left[-\frac{\sin \theta}{2} - \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \right] = 0$$

$$\left[-2 \sin \theta + \frac{3}{2} \cos \theta \right] = 0$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

+ 1,0 pto $\theta = \arctan(3/4)$

Anexo : Alternativa desarrollo P2.1

De manera alternativa, también podemos escribir la velocidad final del proyectil buscando su magnitud v_{2f} y dirección a partir del ángulo θ . En ese caso, en las ecuaciones de conservación de momentum, se tiene

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos \varphi - m_2 v_{f2} \cos \theta, \quad (5)$$

$$0 = -m_1 v_{f1} \sin \varphi + m_2 v_{f2} \sin \theta, \quad (6)$$

De la ecuación (6), se tiene

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{m_2 \sin \theta}, \quad (7)$$

y reemplazando en (5),

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos \varphi - \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{\tan \theta} \quad (8)$$

de donde obtenemos

$$\tan \theta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}}. \quad (9)$$

Este resultado es consistente con lo encontrado anteriormente, notando que $\tan \theta = |v_{f2y}/v_{f2x}|$

Usando este ángulo y la expresión (7) se tiene la magnitud de $\vec{v}_{2f}$. Para llegar a un resultado analítico, usamos que $\sin \theta = \tan \theta / \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$. Se obtiene

$$v_{f2} = \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2} v_{f1}^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{m_1}{m_2} v_{f1} \cos \varphi + v_{02} - \frac{m_1}{m_2} v_{01} \right)^2}. \quad (10)$$

Este resultado también es consistente con lo anterior, $v_{2f} = \sqrt{v_{f2x}^2 + v_{f2y}^2}$.

Desarrollo de pesos "curvosos"

a continuación :



$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} \cos \varphi - \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}}$$

$$-m_1 v_{01} + m_2 v_{02} + m_1 v_{f1} \cos \varphi = + \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{m_1 v_{f1} \cos \varphi + m_2 v_{02} - m_1 v_{01}}$$

$$\tan \theta = \frac{m_1 v_{f1} \sin \varphi}{m_1 v_{f1} \left(\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}} \right)}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}}$$

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}}$$

$$= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{m_2 v_{02}}{m_1 v_{f1}} - \frac{v_{01}}{v_{f1}}} \right)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}}\right)^2 + \sin^2 \varphi}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}}\right)^2 + \sin^2 \varphi}}$$

$$V_{2f} = \frac{m_1 \cdot V_{f1} \cdot \sin \varphi}{m_2 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}}\right)^2 + \sin^2 \varphi}}}$$

$$= \frac{m_1^2 V_{f1}^2 \sin^2 \varphi}{m_2^2 \sin^2 \varphi \left(\left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}} \right)^2 + \sin^2 \varphi \right)}$$

$$= \frac{m_1^2 V_{f1}^2 \cancel{\sin^2 \varphi} \left(\sin^2 \varphi + \left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}} \right)^2 \right)}{m_2^2 \cancel{\sin^2 \varphi}}$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^2 V_{f1}^2 \sin^2 \varphi}{m_2^2} + \frac{m_1^2 V_{f1}^2}{m_2^2} \left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^2 V_{f1}^2 \sin^2 \varphi}{m_2^2} + \left(\frac{m_1 V_{f1}}{m_2} \left(\cos \varphi + \frac{m_2 V_{02}}{m_1 V_{f1}} - \frac{V_{01}}{V_{f1}} \right) \right)^2}$$

$$V_{f2} = \sqrt{\frac{m_1^2 V_{f1}^2 \sin^2 \varphi}{m_2^2} + \left(\frac{m_1 V_{f1} \cos \varphi}{m_2} + V_{02} - \frac{m_1 V_{01}}{m_2} \right)^2}$$