



Ingeniería Eléctrica

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)

Clase auxiliar 9

Prof. Tomás Cassanelli

Prof. Gonzalo Narváez

Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

## 1 Resumen: Carta Smith

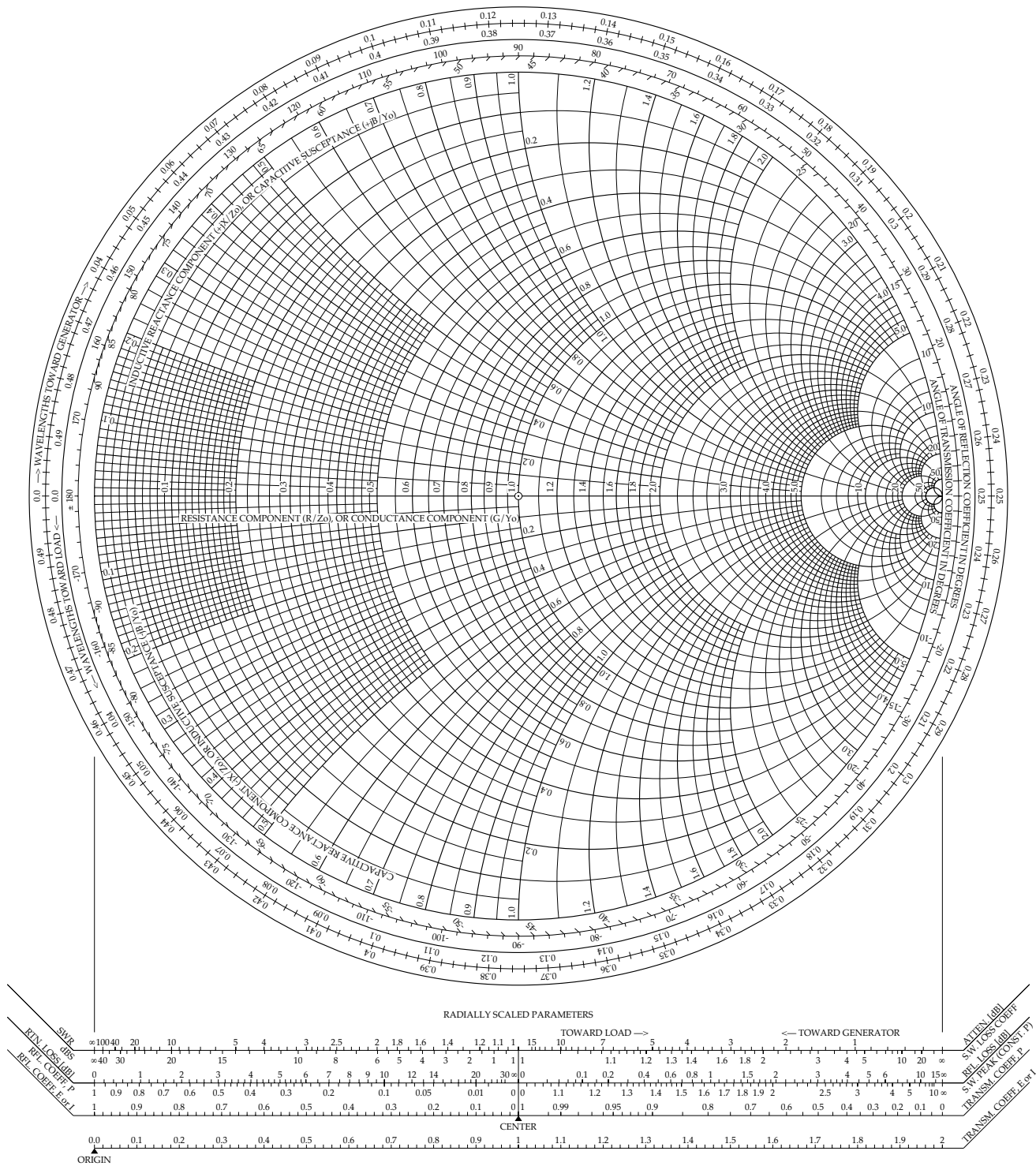
La Carta de Smith, o Diagrama de Smith, es una herramienta gráfica utilizada en ingeniería de radiofrecuencia y diseño de líneas de transmisión. Esta carta proporciona una representación visual de las impedancias en un sistema de transmisión de radiofrecuencia. Esta se construye y se utiliza a partir de:

- **Normalización de impedancias:** Normaliza las impedancias dividiendo cada valor de impedancia por la impedancia característica de la línea de transmisión utilizada. Esto crea impedancias normalizadas, que son adimensionales.
- **Ubicación en el Gráfico Polar:** Representa cada impedancia normalizada como un punto en el gráfico polar. La parte real se coloca en el eje horizontal (resistivo) y la parte imaginaria en el eje vertical (reactivo).
- **Círculos concéntricos en el gráfico:** Representan líneas de constante resistencia y reactancia normalizadas. Estos círculos ayudan a visualizar cambios en la impedancia a medida que varía la frecuencia.
- **Líneas radiales** Estas líneas representan ángulos constantes y se utilizan para medir el ángulo de la impedancia normalizada desde el eje resistivo.
- **Movimientos generador -plano carga** La carta Smith permite visualizar los movimientos que se realizan hacia el generador o hacia el eje, lo cual es muy útil.

La Carta de Smith se construye a partir de impedancias en lugar de admitancias debido a que es más común trabajar con impedancias en el contexto de líneas de transmisión y sistemas de radiofrecuencia. Aun así se puede utilizar para admitancias dado que equivale a una rotación de  $180^\circ$ . Esta carta puede ser difícil de utilizar en un principio pero luego se vuelve intuitiva e incluso preferible por sobre otros métodos de resolución en el contexto de líneas.

# The Complete Smith Chart

## Black Magic Design



1. (a) Sea una linea de transmisión con  $Z_L = 40 + 70j$  y  $Z_0 = 100$  ( $Z_0$  o  $Z_c$  será lo mismo) se busca obtener el modulo del coeficiente de reflexión, el parámetro SWR y la impedancia vista desde la entrada a una distancia de  $0.3\lambda$ . Obtenga los parámetros mediante las formulas y el uso de la de carta Smith.
- (b) Sea un linea de trasmisión la cual tiene un  $Z_L = 30 + 60j$  y  $Z_0 = 50$ , la cual se le adiciona un adaptador  $\lambda/4$ , utilizando la carta Smith elimine las reflexiones.

**Solución:**

- (a) Se busca el obtener los diferentes parámetros utilizando la carta Smith. Primero se calcularan de manera teórica y posteriormente se utilizará la carta Smith para compararlos. Se obtiene el coeficiente de reflexión (Visto en la carga):

$$|\Gamma| = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| \quad (1)$$

Normalizando por  $Z_0$ , se obtendrá que:

$$|\Gamma| = \left| \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \right| \quad (2)$$

La impedancia de carga normalizada vendrá dada por  $z_L = \frac{40}{100} + j\frac{70}{100} = 0.4 + 0.7j$  con lo que reemplazando en el coeficiente de reflexión (Notemos que este parametro no dependera de donde lo observemos ( $z_{in}$ )):

$$|\Gamma| = \left| \frac{(0.4 + 0.7j) - 1}{(0.4 + 0.7j) + 1} \right| \approx 0.59 \quad (3)$$

Por otro lado el SWR lo definimos como:

$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.59}{1 - 0.59} \approx 3.87 \quad (4)$$

Luego se obtiene la impedancia de entrada vista a  $0.3\lambda$  de la carga:

$$Z_{in} = Z_0 \left( \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \right) \quad (5)$$

$$= 100 \left( \frac{(40 + 70j) + j(100) \tan(2\pi/\lambda \cdot 0.3\lambda)}{(100) + j(40 + 70j) \tan(2\pi/\lambda \cdot 0.3\lambda)} \right) \quad (6)$$

$$= 36.5 - j61.1[\Omega] \quad (7)$$

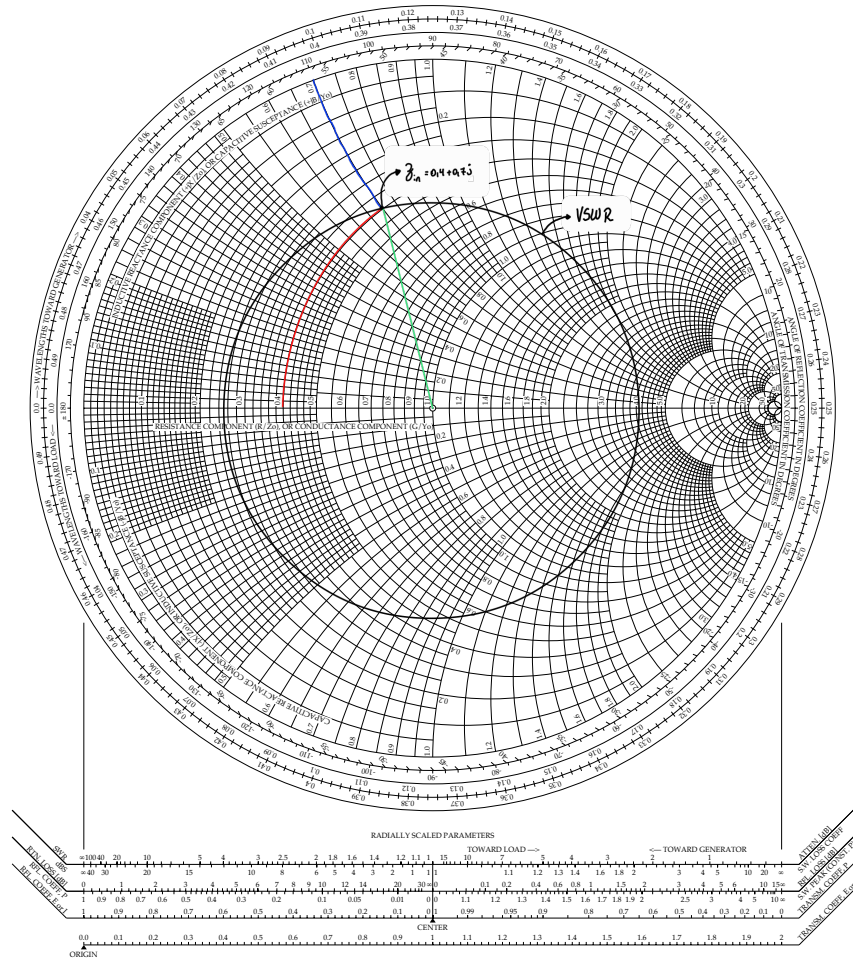
Al normalizar se obtendrá que  $z_{in} = 0.365 - j0.6111[\Omega]$ . Se verificará lo obtenido mediante la carta Smith. Para esto, lo primero será ubicar la impedancia de carga normalizada ( $z_l$ ), según las siguientes indicaciones:

- Nos situamos en la zona real de la carga Smith el cual corresponde al valor real de la impedancia normalizada obtenida con anterioridad. Es decir 0.4 (Linea roja)
- Luego nos desplazamos a través de su circunferencia correspondiente hasta intersectar con la linea asociada al valor de impedancia compleja normalizado de la carga 0.7j (Linea azul)

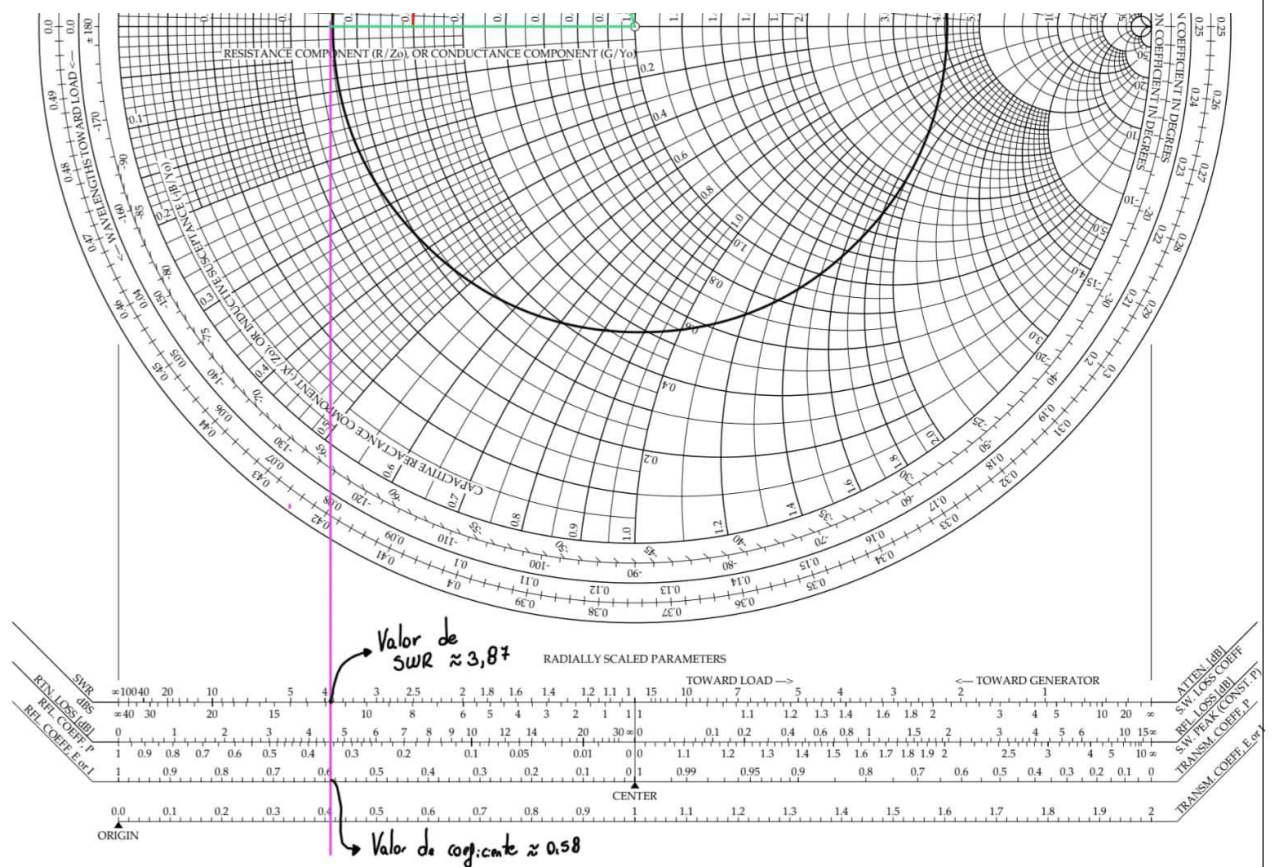
- La intersección de ambos valores nos entrega como resultado el valor de la carga normalizada, con lo que posteriormente realizamos una circunferencia con centro en el círculo unitario (circunferencia negra denominada VSWR) la cual el radio irá desde el centro, 1 real, hasta el valor de la carga normalizada.

Con todas esas consideraciones se obtiene lo siguiente:

**The Complete Smith Chart**  
Black Magic Design



Luego para obtener el valor de SWR se debe trazar una línea recta donde se produzca la intersección de la circunferencia con la zona real de la carta Smith, y se anota el valor con respecto a la intersección de la tabla inferior que se encuentra tabulada, viéndose tal que:



El valor de SWR obtenido es aproximadamente 3.87, coincidiendo con el valor teórico. Para determinar la impedancia de entrada  $z_{in}$  calculada previamente, se siguen estos pasos para la figura 1:

- Trazar una línea desde el círculo unitario hasta la carga  $z_l$  previamente ubicada y extender esta línea hasta los bordes de la carta de Smith (Línea verde).
- Moverse hacia el generador (este movimiento está indicado en la carta smith y es a favor de las manecillas del reloj), ya que cuando se ubica la carga en la carta smith la estamos viendo en la posición  $Z_l$ , por lo que para encontrar el  $Z_{in}$  debemos movernos hacia el generador, a una distancia de  $0.3\lambda$  desde la línea verde. Anotar el valor de intersección de la línea verde con la carta de Smith, obteniendo un valor aproximado de  $0.106\lambda$  (Es importante notar que la carta de Smith tabula la dirección de movimiento).
- Luego se realiza el movimiento al generador  $0.3\lambda$  lo que se adiciona al valor anterior, dando como resultado  $0.406\lambda$  y a partir de ese punto trazamos una línea hacia el círculo unitario (Línea roja)
- Finalmente en la intersección de la línea roja y el círculo negro obtenido anteriormente, se obtiene el valor de  $z_{in}$  (Recordarnos que se encuentra normalizado)

# The Complete Smith Chart

## Black Magic Design

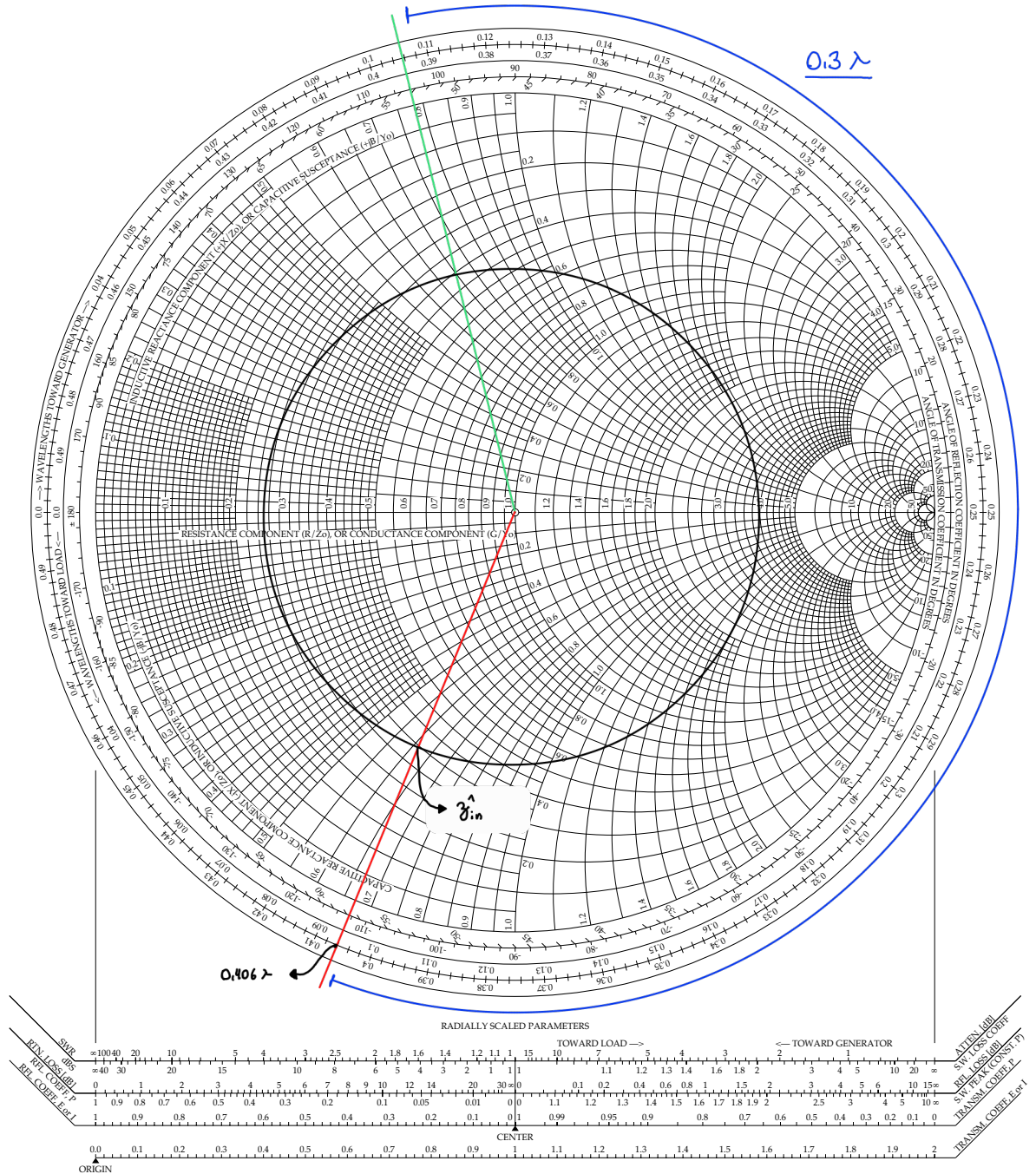
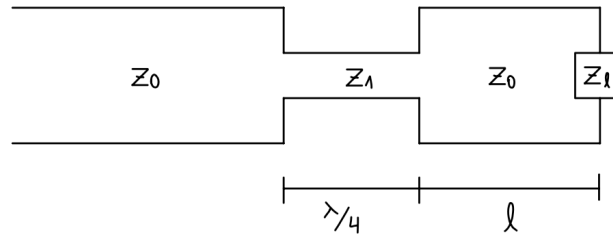


Figure 1: Cara Smith

Al realizar esto ultimo la impedancia de entrada nos entrega un valor de  $z_{in} \approx 0.36 + 0.65$  correspondiendo fielmente a los valores que se obtuvieron de manera teórica anteriormente. Con lo que se verifica el uso correcto de la carta Smith.

- (b) Sea una linea de  $Z_l = 30 + 60j$  y una impedancia característica  $Z_0 = 50$ , la cual se le adiciona un adaptador  $\lambda/4$  con el propósito de eliminar totalmente las reflexiones. El objetivo sera en un principio eliminar la parte compleja y posteriormente adaptar la parte real. (Recordar que es importante seguir este orden, dado que no podemos utilizar un adaptador  $\lambda/4$  el cual tenga una impedancia intrínseca de medio  $Z_1 \in \mathbb{C}$ , debido a que en la realidad no es posible implementar).

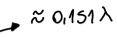


$$z_l = \frac{30}{50} + \frac{60}{50}j = 0.6 + 1.2j \quad (8)$$

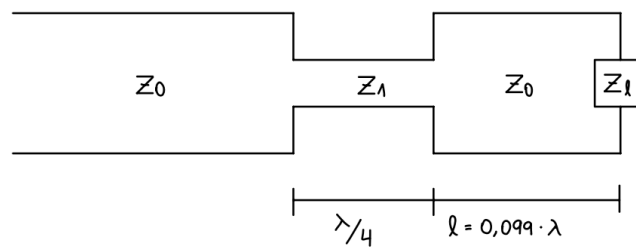
Luego se deberán seguir los siguientes pasos:

- Primero se ubica la impedancia normalizada en la carta Smith y se traza una circunferencia con centro en la zona real (Circunferencia roja).
- Luego se traza una línea desde el centro de la circunferencia hasta el punto de la impedancia normalizada de la carga y se extiende dicha línea (azul) hasta llegar a los valores tabulados en los extremos.
- Se tabula la distancia desde el extremo anterior hasta la zona en que se elimina toda la parte compleja, es decir, hasta ubicarnos en la zona real (Valor azul), siendo este valor la distancia  $l$  buscada.
- Tabulamos el valor obtenido aproximado de 4.41, que desnormalizado corresponde a  $220.5$  (notar que al estar en la parte real de la carta smith adaptamos la línea de tal forma que la parte imaginaria es cero, moviendonos hacia el generador  $0.099\lambda$ ).

## Black Magic Design


$$z = 4,2 + j0$$

Una vez encontrado el valor, se obtiene



Finalmente se deberá solo adaptar la parte real, con lo que utilizando el adaptador se obtiene:

$$Z_{in} = Z_0 \left( \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{Z_1^2}{Z_L} \quad (10)$$

Donde se impone que  $Z_{in} = Z_0$  para eliminar las reflexiones dando como resultado:

$$Z_1 = \sqrt{z_{in} \cdot Z_L} \quad (11)$$

$$= \sqrt{50 \cdot 220.5} \quad (12)$$

$$\approx 105[\Omega] \quad (13)$$

De esta manera para una distancia  $l = 0.099\lambda$  y  $Z_1 \approx 112[\Omega]$ , la carga se encuentra totalmente adaptada tanto en su parte real como imaginaria.

2. Sea el esquema visto en la figura al cual se le adiciona un stub en paralelo de distancia  $l_s$  este a una distancia  $l$  de la carga con valor  $Z_L = 125 - 166j$  y  $Z_0 = 50$ , encuentre tanto  $l_s$  y  $l$  tal que la línea se encuentre totalmente adaptada, hágalo tanto para un stub en un corto-circuito y un circuito abierto.

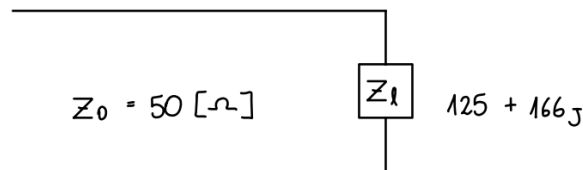
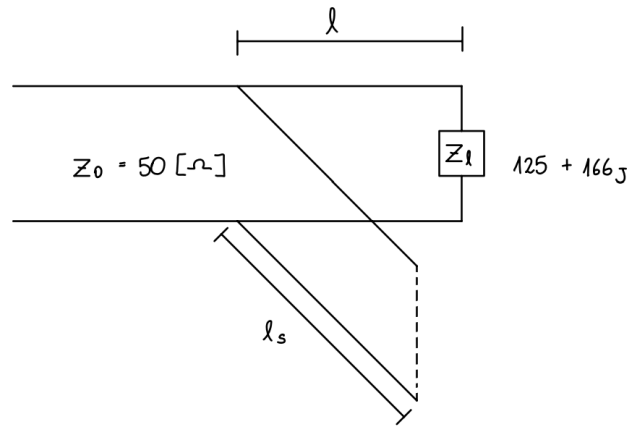


Figura 2: Esquema General

### Solución:

- (a) Dado el esquema al cual se le adiciona un Stub de distancia  $l_s$  a una distancia  $l$  de la carga con valor  $Z_L = 125 - 166j$  y un  $Z_0 = 50[\Omega]$ , se utilizara tanto en corto circuito como abierto para realizar esto. En la practica se emplea de esta manera, dado que soluciona el problema de utilizar adaptadores  $\lambda/4$  que en la practica no se puede modificar los valores de la impedancia intrínseca del medio, por lo que veremos ahora es aplicable en la practica.



Se busca el obtener tanto valor de  $l$  como  $l_s$ , por tanto se comienza normalizando el valor de impedancia.

$$Z_l = 125 - 166j \quad (14)$$

$$z_l = \frac{125}{50} - \frac{166}{50}j = 2.5 - 3.3j \quad (15)$$

Debido al hecho que se tiene una linea en paralelo sera de utilidad el obtener la admitancia. (Es importante notar que se utiliza la admitancia por sobre la impedancia dado que el calcular la admitancia equivalente stub-carga, es mas simple que la impedancia equivalente, tener en cuenta además que en la carta Smith esta diseñada para impedancias con lo que la admitancia equivale a realizar un giro de  $180^\circ$ , para no tener confusiones con esto, se debe seguir el siguiente procedimiento):

$$y_l = \frac{1}{2.5 - 3.3j} = 0.14 + 0.19j \quad (16)$$

Tener cuidado con el signo al calcular el inverso.

1. Se ubica el valor de la admítanla normalizada (Linea roja) y trazamos la circunferencia en torno al valor 1 de la zona real (Circunferencia morada).
2. Trazamos además la circunferencia unitaria. (Circunferencia azul)

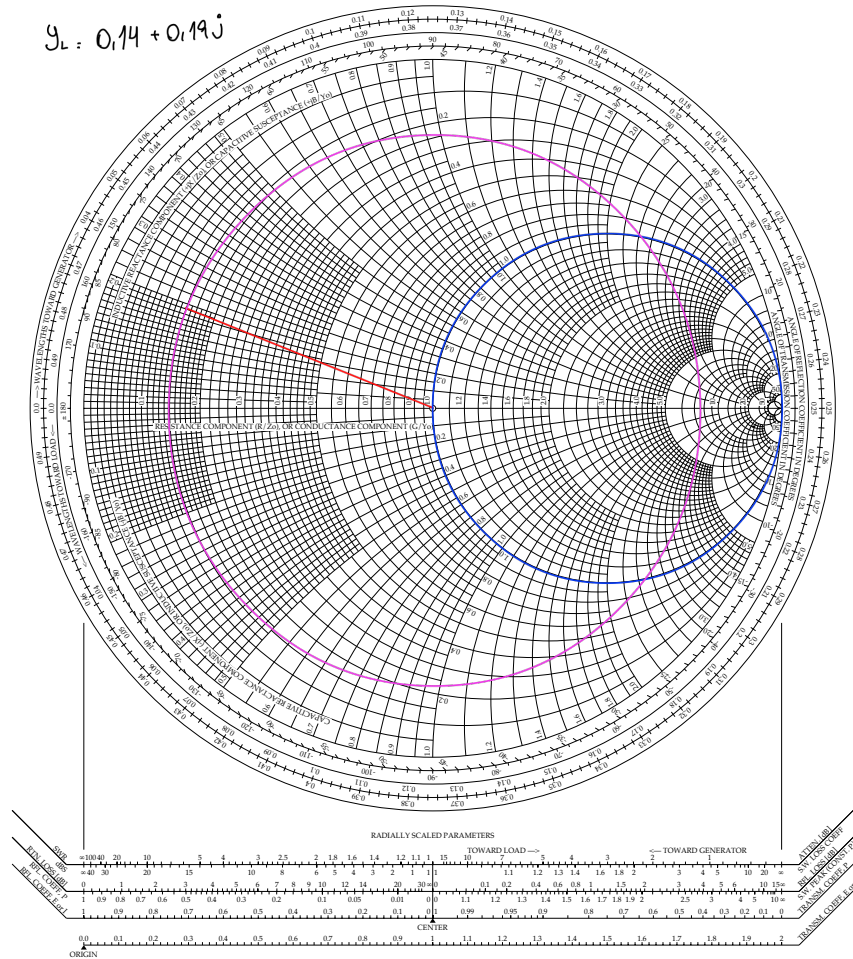
$$Z_L : 125 - 166j$$

$$Y_L : 2.5 - 3.3j$$

$$Y_L : 0.14 + 0.19j$$

## The Complete Smith Chart

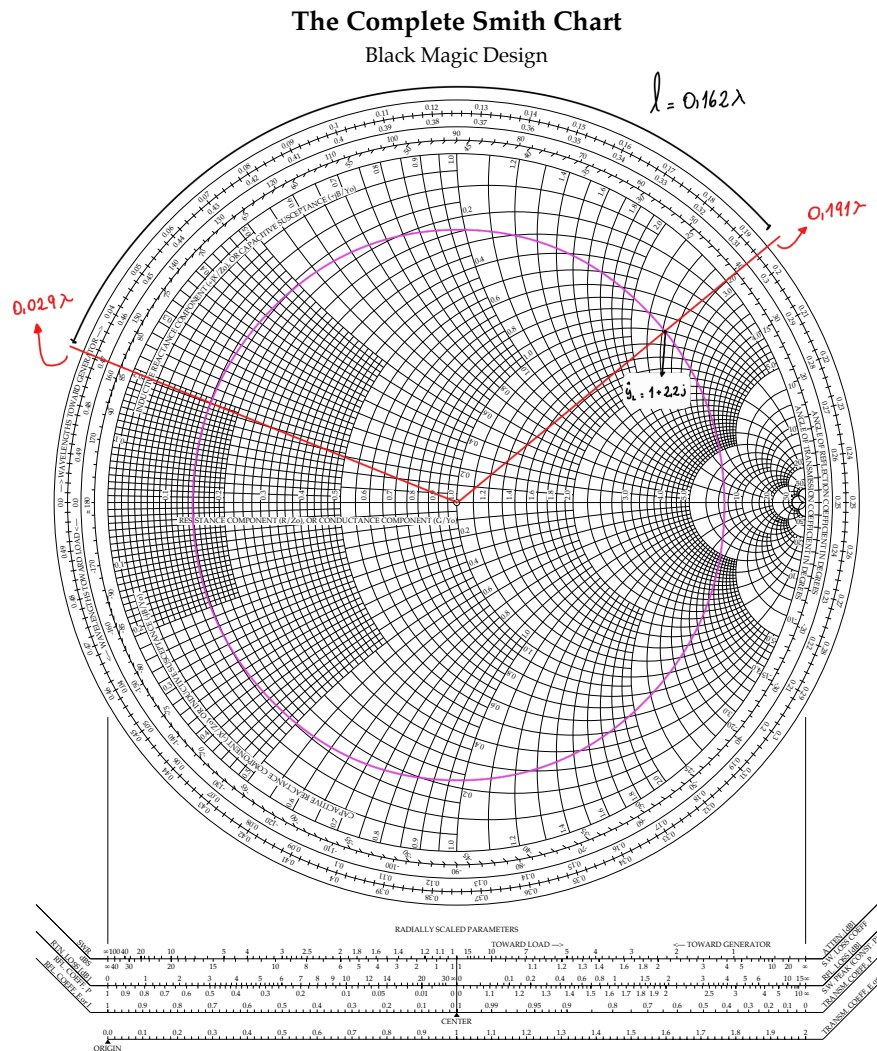
Black Magic Design



Es destacable el mencionar que la ubicación de la admitancia se puede obtener de manera directa, o en consecuente ubicar la impedancia y trasladarla  $180^\circ$ . Luego para la obtención del valor de  $l$  se debe hacer lo siguiente:

1. Extendemos la línea roja hasta el extremo de la carta Smith y anotamos el valor correspondiente y se realizara el traslado hacia el generador debido a que estamos trabajando sobre ese plano
2. Se extiende una línea desde la parte real 1 hasta la intersección de las dos circunferencias (Se puede realizar esta extensión en ambas intersecciones, el análisis es análogo, pero se realiza por la que produzca la distancia  $l$  mas corta)
3. Posteriormente se obtiene la diferencia entre estos dos últimos puntos y dando un valor de  $l=0.162\lambda$ .
4. Es importante el analizar que en dicha ubicación la intersección corresponde a  $y_l = 1 + 2.2j$

Volviendo sobre lo anterior la idea principal es encontrar el valor  $l$  tal que la parte real de la admitancia se encuentre adaptada, esto se produce dado que se intersecta la circunferencia unitaria, lo cual es equivalente a cargas de impedancia normalizada  $z_l = 1 + jx$ . A continuación se adaptara la parte compleja, lo que se realiza mediante el uso del stub en corto o en abierto.



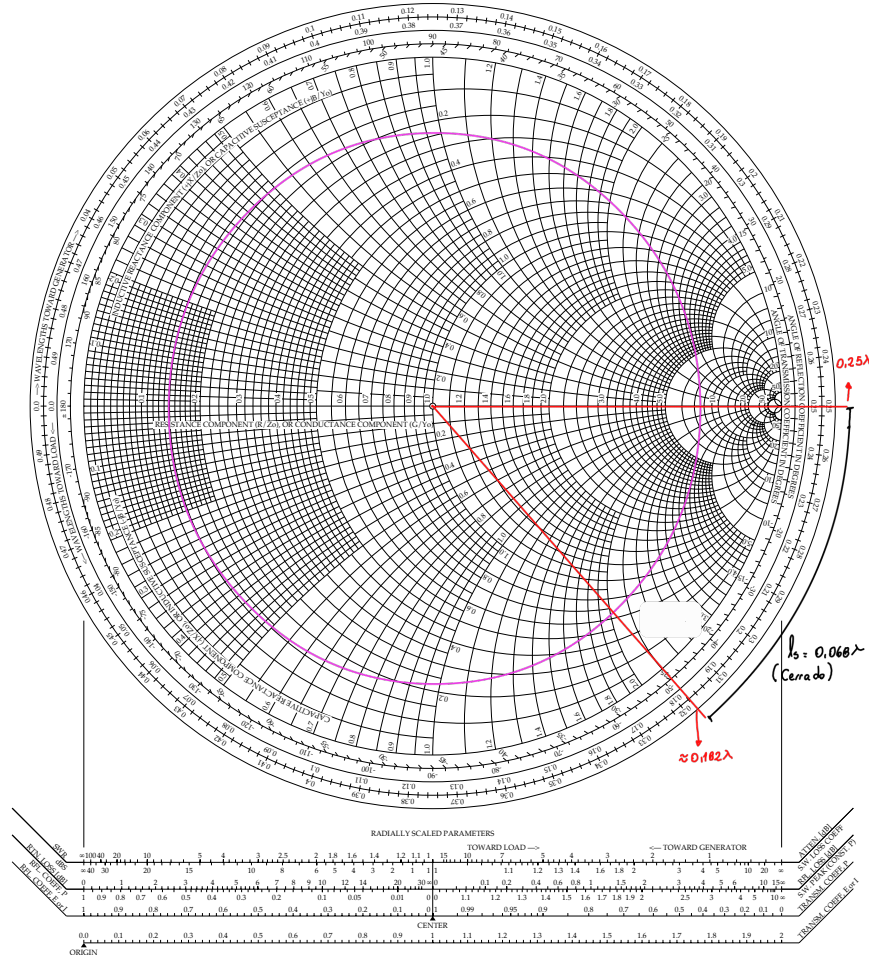
La zona superior de la carta Smith corresponde a la zona inductiva ( $+X_i$ ), mientras que la zona inferior es capacitiva ( $-X_i$ ), la idea principal es que al considerar un circuito en paralelo y el utilizar admitancia por sobre la impedancia, luego la admitancia equivalente sera la suma del stub en paralelo mas la parte compleja de la carga (dado que ya adaptamos la parte real). Se posiciona en la zona inductiva con una parte compleja de  $2.2j$  obtenida con anterioridad, luego la idea del stub es que su parte compleja sea capacitiva  $-2.2j$  tal que al sumarse con la primera se obtenga solo la parte real la que ya se encuentra adaptada, esto se realiza mediante los siguientes pasos.

1. Dado que el valor de la impedancia en la intersección que se obtuvo con anterioridad de la forma  $y_l = 1 + 2.2j$ , luego se realiza una línea desde el la carga adaptada 1, hasta el valor  $-2.2j$  en la carta Smith (Línea roja)

2. Como se esta trabajando ahora en el plano de la carga, se desplazara en tal dirección. Es por esto ultimo que el movimiento se realiza en contra de las manecillas del reloj, esto se realiza hasta intersectar con la zona real del extremo derecho de la carta Smith (Es decir que eliminamos por completo la parte compleja)
3. Es importante tener en cuenta que estamos haciendo el análisis para un stub en corto.

### The Complete Smith Chart

Black Magic Design

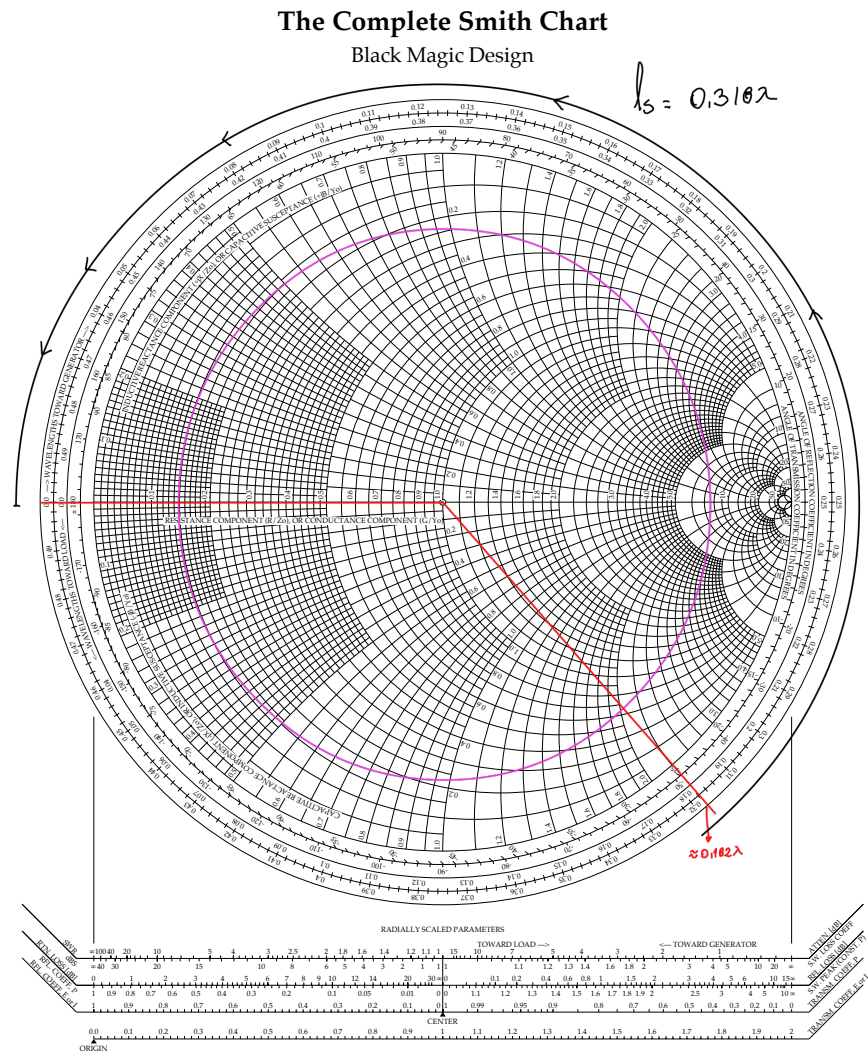


Con lo que en este caso se obtiene un valor de stub de  $l_s = 0.068\lambda$ . Para el caso del circuito abierto el procedimiento es análogo pero teniendo en cuenta una consideración:

1. Dado que el valor de la impedancia en la intersección que se obtuvo con anterioridad de la forma  $y_l = 1 + 2.2j$ , luego se realiza una línea desde el la carga adaptada 1, hasta el valor  $-2.2j$  en la carta smith (Línea roja)
2. Como se esta trabajando ahora en el plano de la carga, se desplazara en tal dirección. Es por esto ultimo que el movimiento se realiza en contra de las manecillas del reloj, esto se realiza hasta intersectar con la zona real del extremo izquierdo de la carta Smith, (Es decir

que eliminamos por completo la parte compleja)

3. Es importante tener en cuenta que estamos haciendo el análisis para un stub en abierto.



Con lo que en este caso se obtiene un valor de stub de  $l_s = 0.318\lambda$