



1. Resuelva los siguientes problemas basados en el esquema de la figura 1.

- Las expresiones para el campo eléctrico $\mathcal{E}$ y la intensidad magnética $\mathcal{H}$.
- Obtenga una expresión para E_1^- (onda reflejada del medio 1), tal que esta dependa de (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1) considerando una distancia $d = \frac{\lambda}{4}$.
- Sea el caso en que $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$, demuestre en base a la expresión anterior que no existirá onda reflejada en el medio 1. Hint: ocupar la siguiente expresión:

$$(b + c)(b - a) + (b + a)(b - c) = (b^2 - ac) \quad (1)$$

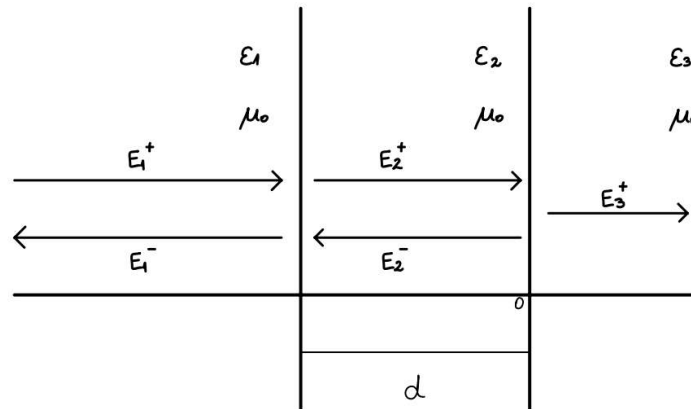


Figura 1: Onda en 3 medios.

Solución:

- Se tiene las siguientes expresiones para los campos eléctricos y magnéticos según los medios y las zonas de interés:

Campo eléctrico e intensidad magnética en $z \leq d$

$$\mathcal{E}_1 = E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{jk_1 z} \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_1 = Y_1 E_1^+ e^{-jk_1 z} - Y_1 E_1^- e^{jk_1 z} \quad (3)$$

Campo eléctrico e intensidad magnética para $d \leq z \leq 0$

$$\mathcal{E}_2 = E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jk_2 z} \quad (4)$$

$$\mathcal{H}_2 = Y_2 E_2^+ e^{-jk_2 z} - Y_2 E_2^- e^{jk_2 z} \quad (5)$$

Campo eléctrico e intensidad magnética eléctricos $z \geq 0$

$$\mathcal{E}_3 = E_3^+ e^{-jk_3 z} + 0 \quad (6)$$

$$\mathcal{H}_3 = Y_3 E_3^+ e^{-jk_3 z} + 0 \quad (7)$$

Recordando que en el medio 3 no existe onda reflejada, por lo que se tiene que $E_3^- = 0$.

- (b) Se busca el obtener una relación para la intensidad de campo eléctrico E_1^- tal que dependa de las variables (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1) . Para lograr estos, utilizaremos las condiciones de bordes en las interfaces de los medios.

Primera condición de borde $z = -d$

$$\mathcal{E}_1(z = -d) = \mathcal{E}_2(z = -d) \quad (8)$$

$$E_1^+ e^{jk_1 d} + E_1^- e^{-jk_1 d} = E_2^+ e^{jk_2 d} + E_2^- e^{-jk_2 d} \quad (9)$$

Luego evaluando en $d=\lambda/4$ se tendrá:

$$E_1^+(j) + E_1^-(-j) = E_2^+(j) + E_2^-(-j) \quad (10)$$

$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \quad (11)$$

De manera análoga para la intensidad de campo magnético:

$$\mathcal{H}_1(z = -d) = \mathcal{H}_2(z = -d) \quad (12)$$

$$Y_1 E_1^+ e^{jk_1 d} - Y_1 E_1^- e^{-jk_1 d} = Y_2 E_2^+ e^{jk_2 d} - Y_2 E_2^- e^{-jk_2 d} \quad (13)$$

$$Y_1 E_1^+(j) - Y_1 E_1^-(-j) = Y_2 E_2^+(j) - Y_2 E_2^-(-j) \quad (14)$$

$$Y_1 E_1^+ + Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \quad (15)$$

Segunda condición de borde $z = 0$

$$\mathcal{E}_2(z = 0) = \mathcal{E}_3(z = 0) \quad (16)$$

$$E_2^+ e^{jk_0} + E_2^- e^{-jk_0} = E_3^+ e^{jk_0} \quad (17)$$

$$E_2^+ + E_2^- = E_3^+ \quad (18)$$

$$\mathcal{H}_2(z = 0) = \mathcal{H}_3(z = 0) \quad (19)$$

$$Y_2 E_2^+ e^{jk_0} - Y_2 E_2^- e^{-jk_0} = Y_3 E_3^+ e^{jk_0} \quad (20)$$

$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_3^+ \quad (21)$$

Luego se obtienen las ecuaciones que nos permitirán obtener lo buscando, reemplazando E_3^+ :

$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_3^+ \quad (22)$$

$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 (E_2^+ + E_2^-) \quad (23)$$

$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_2^+ + Y_3 E_2^- \quad (24)$$

$$E_2^+ (Y_2 - Y_3) = E_2^- (Y_2 + Y_3) \quad (25)$$

$$E_2^+ = E_2^- \frac{(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \quad (26)$$

Se tendrá por otro lado que:

$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \quad (27)$$

$$E_1^+ = E_2^+ - E_2^- + E_1^- \quad (28)$$

$$(29)$$

Luego reemplazando esta expresión en lo siguiente:

$$Y_1 E_1^+ + Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \quad (30)$$

$$Y_1(E_2^+ - E_2^- + E_1^-) + Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \quad (31)$$

$$Y_1 E_2^+ - Y_1 E_2^- + 2Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \quad (32)$$

$$(33)$$

Dado que se busca el obtener explícitamente la expresión E_1^- , despejando en base a lo anterior se tendrá:

$$E_1^- = \frac{E_2^+(Y_2 - Y_1) + E_2^-(Y_1 + Y_2)}{2Y_1} \quad (34)$$

$$(35)$$

Considerando la ecuación de borde obtenida con anterioridad:

$$E_2^+ = \frac{E_2^-(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \quad (36)$$

Reemplazando la ecuación anterior en la expresión de E_1^- se tendrá:

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2 + Y_3)(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \quad (37)$$

Finalmente se obtiene una expresión para E_1^- en términos de las variables conocidas.

(c) Se busca el analizar la situación en que $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$, por lo volviendo sobre la ecuación anterior.

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2 + Y_3)(Y_2 - Y_1)}{(Y_2 - Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \quad (38)$$

$$E_1^- = \frac{E_2^- ((Y_2 + Y_3)(Y_2 - Y_1) + (Y_2 + Y_1)(Y_2 - Y_3))}{2Y_1(Y_2 - Y_3)} \quad (39)$$

Utilizando el hint del enunciado:

$$(b + c)(b - a) + (b + a)(b - c) = (b^2 - ac) \quad (40)$$

La exoresión queda reducida a:

$$E_1^- = \frac{E_2^-(Y_2^2 - Y_1 Y_3)}{2Y_1(Y_2 - Y_3)} \quad (41)$$

Luego tomando el numerador de la expresión anterior y recordando que la admitancia viene dada por $Y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$

$$Y_2^2 - Y_1 Y_3 = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\mu_0^2}} \right) \quad (42)$$

$$= \frac{\epsilon_2}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}}{\mu_0} \quad (43)$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}}{\mu_0} \quad (44)$$

$$= 0 \quad (45)$$

Con lo que bajo la condición inicial se obtiene que $E_1^- = 0$, es decir que no se tendrá onda reflejada en el medio 1.

2. Considere una onda plana cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 (donde $E_0 = E_1^+$) y dirección $\hat{x}$, incidiendo normalmente en una sección de tres medios diferentes, siendo este último una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor ($\sigma = \infty$), como se indica en la figura 2.
 - (a) Obtenga una relación entre los campos E_2^- y E_2^+ en función de d_2 .
 - (b) Una vez determinada la expresión anterior, analice cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$ y explique en términos del módulo del coeficiente de reflexión.
 - (c) Considerando que $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, determine una expresión para las amplitudes de los campos E_1^- y E_1^+ y analice el caso cuando $d_1 = \frac{\lambda}{2}$.
 - (d) Considerando que $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$, calcule el valor de potencia por unidad de área en el Medio 1 tanto para la onda incidente como para la reflejada.
 - (e) ¿Son las potencias para la onda incidente y reflejada, obtenidas con anterioridad, diferentes? Argumente su respuesta.

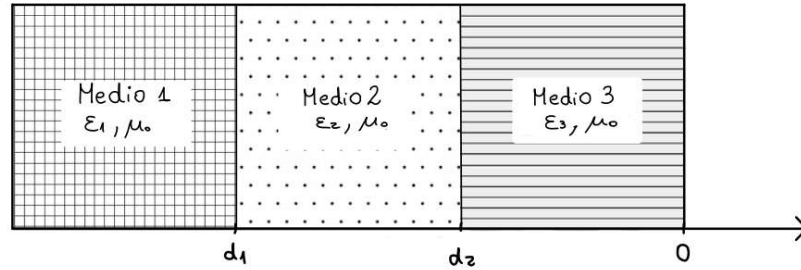


Figura 2: Tres medios con el último adosado a un plano perfectamente conductor.

Solución:

- (a) Se busca obtener una relación para los campos E_2^- y E_2^+ en función de d_2 , por tanto las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en general para los diferentes medios corresponden:

Medio 1: $z \leq d_1$

$$\mathcal{E}_1(z, t) = (E_1^+ e^{jwt} e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{jwt} e^{jk_1 z}) \hat{x} \quad (46)$$

$$\mathcal{H}_1 = Y_1(\hat{z}) \times \mathcal{E}_1 \hat{x} \quad (47)$$

$$\mathcal{H}_1 = Y_1(E_1^+ e^{jwt} e^{-jk_1 z} - E_1^- e^{jwt} e^{jk_1 z}) \hat{y} \quad (48)$$

Medio 2: $d_1 \leq z \leq d_2$

$$\mathcal{E}_2(z, t) = (E_2^+ e^{jwt} e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jwt} e^{jk_2 z}) \hat{x} \quad (49)$$

$$\mathcal{H}_2 = Y_2(\hat{z}) \times \mathcal{E}_2 \hat{x} \quad (50)$$

$$\mathcal{H}_2 = Y_2(E_2^+ e^{jwt} e^{-jk_2 z} - E_2^- e^{jwt} e^{jk_2 z}) \hat{y} \quad (51)$$

Medio 3: $d_2 \leq z \leq 0$

$$\mathcal{E}_3(z, t) = (E_3^+ e^{jwt} e^{-jk_3 z} + E_3^- e^{jwt} e^{jk_3 z}) \hat{x} \quad (52)$$

$$\mathcal{H}_3 = Y_3(\hat{z}) \times \mathcal{E}_3 \hat{x} \quad (53)$$

$$\mathcal{H}_3 = Y_3(E_3^+ e^{jwt} e^{-jk_3 z} - E_3^- e^{jwt} e^{jk_3 z}) \hat{y} \quad (54)$$

Con lo que finalmente se obtienen las expresiones de campo eléctrico y intensidad magnetica para los 3 medios, el 4 es despreciable debido a la presencia de una pared con conductividad infinita (Reflexión total). Luego queremos relacionar E_2^+ y E_2^- , es por esto que evaluaremos en la interfaz de los medios 2 y 3:

Interfaz medio 2 y 3 (campo eléctrico)

$$\mathcal{E}_2(z = -d_2) = \mathcal{E}_3(z = -d_2) \quad (55)$$

Reemplazando y teniendo la consideración con los signos se tendrá que:

$$(E_2^+ e^{jwt} e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{jwt} e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jwt} e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{jwt} e^{-jk_3 d_2}) \quad (56)$$

A partir de ahora omitiremos en todas las expresiones los términos fasoriales asociados a el tiempo e^{jwt} dado que no cambia con los cambios de medios por lo que no sera relevante.

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{-jk_3 d_2}) \quad (57)$$

Necesitamos eliminar la dependencia de las amplitudes asociadas al medio 3, por lo que evaluando en $z=0$, tenemos que:

$$\mathcal{E}_3(z = 0, t) = (E_3^+ e^{-jk_3 \cdot 0} + E_3^- e^{jk_3 \cdot 0}) = 0 \quad (58)$$

$$= E_3^+ + E_3^- = 0 \quad (59)$$

$$E_3^+ = -E_3^- \quad (60)$$

Recordemos que lo igualamos a 0, debido a la conductividad infinita de la interfaz y por tanto la no existencia de onda en el otro medio. Reemplazando esta condición sobre lo anterior:

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{-jk_3 d_2}) \quad (61)$$

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = E_3^+ (e^{jk_3 d_2} - e^{-jk_3 d_2}) \quad (62)$$

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = 2E_3^+ j \sin(k_3 d_2) \quad (63)$$

Con lo que reducimos a solo tener un E_3^+ , con lo que debemos relacionar alguna otra expresión para reducirlo, usando la intensidad de campo magnético de la siguiente manera:

Interfaz medio 2 y 3 (campo magnético)

$$\mathcal{H}_2(z = -d_2) = \mathcal{H}_3(z = -d_2) \quad (64)$$

$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3(E_3^+ e^{-jk_3 z} - E_3^- e^{jk_3 z}) \quad (65)$$

Utilizamos la misma condición que obtuvimos de antes (Es decir que $E_3^+ = -E_3^-$):

$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3 E_3^+ (e^{-jk_3 z} + e^{jk_3 z}) \quad (66)$$

$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3 2E_3^+ \cos(k_3 d_2) \quad (67)$$

Luego realizando la división se observa que queda expresada solo en términos de E_2^+ y E_2^- con lo que podemos relacionarlos en función de parámetros conocidos, es decir:

$$\frac{(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2})}{Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z})} = \frac{j \tan(k_3 d_2)}{Y_3} \quad (68)$$

Luego despejando se logra obtener que

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{jk_2 d_2} \left(\frac{Y_2}{Y_3} j \tan(k_3 d_2) - 1 \right)}{e^{-jk_2 d_2} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_3} j \tan(k_3 d_2) \right)} \quad (69)$$

Con lo que finalmente se obtiene una expresión que relaciona los campos solo en función de la distancia d_2

- (b) Se desea analizar la expresión anterior cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, por lo que evaluando de manera directa se tendrá:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{jk_2 \cdot \frac{\lambda}{2}} \left(\frac{Y_2}{Y_3} j \tan(k_3 \cdot \frac{\lambda}{2}) - 1 \right)}{e^{-jk_2 \cdot \frac{\lambda}{2}} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_3} j \tan(k_3 \cdot \frac{\lambda}{2}) \right)} \quad (70)$$

Luego teniendo en consideración que:

$$e^{\pm j k_2 d_2} = e^{\pm j \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}} = e^{\pm j \pi} = (-1) \quad (71)$$

$$j \tan(k_3 d_2) = j \tan(\pi) = 0 \quad (72)$$

Relacionándolo con lo anterior sigue que:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{-1 \left(\frac{Y_2}{Y_3} \cdot 0 - 1 \right)}{-1 \left(1 + \frac{Y_2}{Y_3} \cdot 0 \right)} \quad (73)$$

$$E_2^- = -E_2^+ \quad (74)$$

Con lo que tenemos un efecto similar al de una pared con conductividad infinita. Así calculamos el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{E_2^-}{E_2^+} e^{-2jk_2 d_2} \quad (75)$$

$$= (-1) \quad (76)$$

Donde si evaluamos obtenemos a priori lo que se esperaba el tener el efecto de una pared con conductividad infinita, esto principalmente porque tenemos amplitudes iguales solo con signos opuestos y por lo tanto tendremos además una reflexión con un desfase de $\pm \pi$.

- (c) Se busca relacionar las amplitudes para el medio 1 considerando la misma distancia para ($d_2 = \lambda/4$) y relacionarlo con lo obtenido con anterioridad. Es directo ver que tenemos el mismo análisis anterior (Un error común es volver a calcularlo y perder mucho tiempo), por lo que directamente tenemos que:

$$E_1^- = E_1^+ \frac{e^{jk_1 d_1} \left(\frac{Y_1}{Y_2} j \tan(k_2 d_1) - 1 \right)}{e^{-jk_1 d_1} \left(1 + \frac{Y_1}{Y_2} j \tan(k_2 d_1) \right)} \quad (77)$$

Con lo que tenemos para $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$

$$E_1^- = -E_1^+ = -E_0 \quad (78)$$

Recordando que la amplitud de la onda incidente es conocida

- (d) Luego buscamos obtener si las potencias de la onda incidente y reflejada son iguales bajo las condiciones anteriores, con lo tenemos lo siguiente:

$$\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{1}{2} (E_1^+)^2 Y_1 \hat{z} \quad (79)$$

$$\langle \mathbf{S}_1^- \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{1}{2} (E_1^-)^2 Y_1 \hat{z} \quad (80)$$

En base a lo anterior se tendrá que $E_1^+ = -E_1^- = -E_0$, pero dado que tenemos la expresión cuadrado, se observa finalmente que:

$$\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle = \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \quad (81)$$

Lo cual es consistente con la intuición.