Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 5

Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Resumen: Conceptos de ondas

Es importante el recordar que los campos eléctricos y magnéticos pueden ser representados mediante ecuaciones de onda. Utilizando las ecuaciones de Maxwell-Heaviside se tiene:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{1}$$

Luego la ecuación (1) se utilizará en lo siguiente. Utilizando las propiedades de los operadores se tendrá:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{3}$$

$$\nabla \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{4}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{5}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{6}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Con lo que se logra obtener la ecuación de onda que permite describir el campo magnético, es importante notar que $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ con c la velocidad de la luz. De manera análoga para el campo eléctrico se tendrá:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

Constante de propagación: La constante de propagación describe cómo las ondas electromagnéticas se propagan y se atenúan a medida que atraviesan el medio, donde existen dos parámetros de interés

- α: Atenuación del campo electromagnético en el medio. Es la parte real de la constante de propagación.
- $j\beta$: Componente imaginaria de la constante de propagación. Está asociado con la variación espacial de la onda y se mide en radianes por unidad de longitud.

La expresión completa viene caracterizada por:

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon' \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)} \tag{10}$$

Para la gran mayoría de ejercicios se considerara que los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación y por tanto son representados tal que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = E_{inc}e^{(\alpha - j\beta)}E^{j\omega t} + E_{ref}e^{(\alpha + j\beta)}E^{j\omega t} \tag{11}$$

Donde se tendrá una onda incidente E_{inc} (proveniente de alguna fuente) y una onda reflejada E_{ref} (producto del cambio de medio), así como una posible onda transmitida que continuará en el otro medio, en caso de existir. Además, debemos considerar que la propagación es en la dirección $\widehat{\boldsymbol{k}}$. Sabemos que, debido a la notación fasorial, podemos expresar el rotor del campo eléctrico como:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{12}$$

Lo que permite obtener el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en función de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ como:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = Y\widehat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{13}$$

Donde Y representa la admitancia del medio, la cual viene dada por:

$$\begin{aligned} Y &= Y_0\sqrt{\epsilon_r} && (14)\\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_{medio}}{\mu_0}} && (15) \end{aligned}$$

Es importante recordar las expresiones asociadas a las condiciones de borde así como de Potencia y energía para los próximos ejercicios. Además de las siguientes identidades:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \tag{16}$$

También se ocupará la siguiente relación entre la exponencial el seno y el coseno para simplificar las expresiones:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{17}$$

Fórmula vector de Poynting: La densidad de potencia promedio en un medio es dada por:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \tag{18}$$

1. Sea el siguiente set de preguntas, responda de manera clara y precisa.
   (a) Descripción de la curva de histéresis en términos de H-B y dibujo del diagrama. ¿Para qué tipo de material está descrita, lineal o no lineal?
   (b) Ecuaciones de Maxwell en materiales lineales y con solución armónica.
   (c) Descripción de la variable P (vista en clases). ¿Qué significa y en qué situaciones no es aplicable?
   (d) Orden de susceptibilidad magnética χm en metales comunes. Menciones dos materiales diamagnéticos y dos paramagnéticos.
   (e) ¿Qué es el punto de Curie?
   (f) ¿Que tipo de polarizacion emite un cuerpo negro (o blackbody)? De un ejemplo de cuerpo negro.
   (g) Escriba una aproximacion a primer orden de la constante de propagacion para un buen conductor (es decir $\sigma/(\omega\epsilon) >> 1$).

Solución:

a) Describa la curva de histeresis en términos de H-B, dibuje el diagrama. ¿Para que tipo de material esta descrita, lineal o no lineal?

La curva de histéresis muestra la curva de magnetización de un material. Sea cual sea el material específico, la forma tiene características similares.

- Al principio, la magnetización requiere un mayor esfuerzo eléctrico. Este intervalo es la llamada zona reversible.
- En un determinado punto, la magnetización se produce de forma proporcional. En ese punto se inicia la denominada zona lineal.
- Finalmente, se llega un instante a partir del cual, por mucha fuerza magnética que induzcamos al material, ya no se magnetiza más. Este es el llamado punto de inducción de saturación, que determina el inicio de la llamada zona de saturación.

Esto es clave para el almacenamiento de datos como por ejemplo un disco duro. Su curva se caracteriza por lo siguiente:

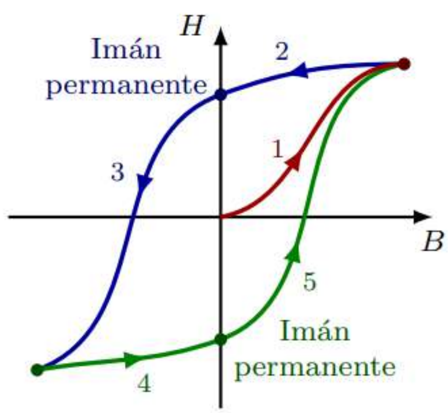


Figura 1: Esquema General

b) Escriba las Ecs. de Maxwell en materiales lineales y con solución armónica.

Las soluciones armónicas hacen referencias a soluciones del tipo sinusoidal que son las mas usadas en relación al electromagnetismo para la descripción de los campos, además se utiliza la notasion fasorial para la simplificación matemática de estos campos, por lo que se tiene la siguiente consideración:

$$E(r,t) = E(r)e^{jwt} \tag{19}$$

Lo que permite entre otras cosas, es poder realizar el estudio de campo tanto en su parte geométrica como temporal por separado, luego las ecuaciones de maxwell serán reescritas como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \qquad \nabla \times E &= -jwB \\ \nabla \cdot B &= 0 & \qquad \nabla \times H &= J + jwD \end{aligned}$$

Permitiendo un mejor manejo de las expresiones

c) Describa la variable P (vista en clases), ¿que significa y en que situaciones no es aplicable?

P es el momento dipolar por unidad de volumen y se define de la siguiente manera:

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i p_i = \frac{dp}{dV} \tag{20}$$

con p y V el momento dipolar de alguna (macro)-molécula o átomo y volumen en cuestión. P describe la polarización de un sistema y esta bien descrita en materiales densos. En situaciones discretas no representara a un sistema

d) ¿Cual es el orden de susceptibilidad magnética χ_m en metales comunes? Menciones dos materiales diamagnéticos y dos paramagnéticos

Los materiales magnéticos se pueden clasificar en los siguientes:

- Los materiales diamagnéticos son débilmente magnéticos (μ_r ¡ 1), y responden ante estos campos repeliéndolos. Entre los materiales diamagnéticos se encuentran el bismuto, la plata, el plomo y el agua.
- Los materiales paramagnéticos son lo opuesto a los diamagnéticos ($\mu_r \approx 1$), pues presentan un magnetismo leve pero son atraídos por dichos campos. Si bien estos materiales son atraídos por imanes, no se convierten en materiales permanentemente magnetizados. Algunos elementos de esta categoría son el aire, el aluminio y el paladio.
- Los materiales ferromagnéticos son fuertemente magnéticos (μ_r ¿¿ 1), pues atraen con gran fuerza a los campos magnéticos. Son elementos ferromagnéticos el hierro, el cobalto, el níquel y el acero.

Recordemos que la constante μ se define como:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \tag{21}$$

Por lo que de la siguiente tabla se pueden obtener conclusiones:

Diamagnético	χ_m	Paramagnético	χ_m
Bismuto	-1.6×10^{-4}	Oxigeno	1.9×10^{-6}
Oro	-3.4×10^{-5}	Sodio	8.5×10^{-6}
Plata	-2.4×10^{-5}	Aluminio	2.1×10^{-5}
Cobre	-9.7×10^{-6}	Tungsteno	7.8×10^{-5}
Agua	-9×10^{-6}	Platino	2.8×10^{-4}
Dióxido de carbono	-1.2×10^{-8}	Oxigeno líquido ($-200\,^{\circ}$C)	3.9×10^{-3}
Hidrógeno	-2.2×10^{-9}	Gadolinio	4.8×10^{-1}

Figura 2: Esquema General

Donde los ordenes de χ_m son usualmente del rango $[10^{-6} - 10^{-4}]$

e)¿Que es el punto de Curie?

La magnetización de un material no solo dependerá del campo aplicado **B** visto en la curva de Histeresis de la pregunta anterior si no que también de la temperatura, por lo que nos centramos en el **Punto de Curie** que es un fenómeno al cual un cuerpo que se comporta como un ferromagnético pierde su magnetismo de manera abrupta comportándose puramente como un material paramagnético este fenómeno ocurre por un proceso de mecánica estadística

f)¿Que tipo de polarizacion emite un cuerpo negr (o blackbody)? De un ejemplo de cuerpo negro.

Un cuerpo negro emite en todas las polarizaciones, es decir no polarizado. El Sol.

Escriba una aproximacion a primer orden de la constante de propagacion para un buen conductor (es decir $\sigma/(\omega\epsilon) >> 1$).

La aproximacion es de la forma:

$$\gamma = \sqrt[2]{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j\omega\sigma\mu\left(1 + j\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)} \approx \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\angle 45 \qquad (22)$$

2. Considere una onda plana en la figura 3, cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 (refiriendose a la amplitud $E_0 = E_1^+$) y dirección $\widehat{\boldsymbol{i}}$, incidiendo normalmente en una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor, como se indica la figura. Además considere que la frecuencia de operación es f_0 y el espesor de la placa dieléctrica es d = $\lambda/4$, donde λ es la longitud de onda dentro del dieléctrico.
   (a) Determine los campos totales $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)$ en todas partes. Además, bosqueje $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)\|$ y $\|\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)\|$.
   (b) Determine el coeficiente de reflexión $\Gamma(z)$ en z=-d
   (c) Determine la densidad de potencia (Por unidad de área en el plano xy) incidente y reflejada para cualquier z<-d.

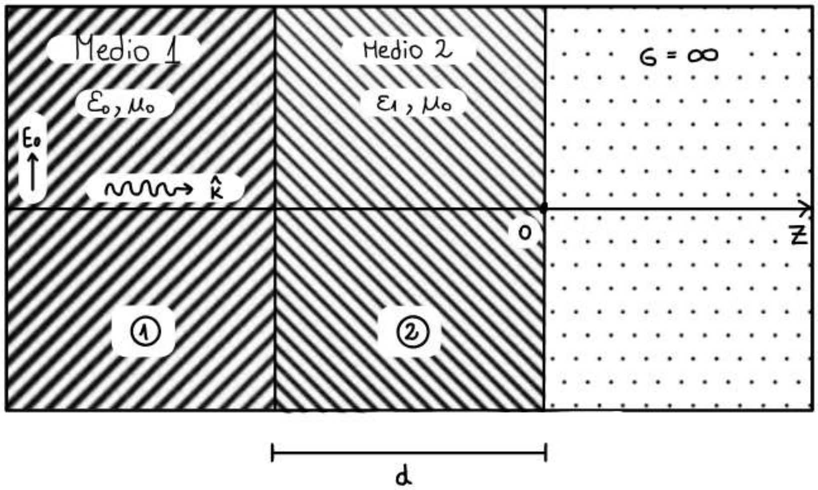


Figura 3: Placa dieléctrica de dos medios.

Solución:

(a) Se busca el obtener los campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)$ en todos los medios, se tendrá que analizar en cada uno de estos, además de analizar sus condiciones de borde:

Campo eléctrico Medio 1

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) = (E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})\widehat{\boldsymbol{\imath}} \tag{23}$$

Campo eléctrico Medio 2

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 z})\widehat{\boldsymbol{\imath}} \tag{24}$$

Luego buscamos analizar las condiciones de borde por tanto se considera los casos en que z = -d y z = 0.

Caso 1 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z = -d) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = -d)$

Sabemos por condiciones de borde, que dichos campos eléctricos en la interfaz deberán ser iguales, por lo que igualando se tiene que:

$$(E_1^+ e^{jw_o t} e^{jk_0 d} + E_1^- e^{jw_o t} e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{jk_1 d} + E_2^- e^{jw_o t} e^{-jk_1 d}) \tag{25}$$

Notamos que la componente asociada a la frecuencia puede ser eliminada, por lo que reduciendo la expresión (Muchas veces la omitiremos por el mismo motivo dado que entre medios su variante temporal debe ser la misma).

$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{26}$$

Esta expresión, la ocuaremos luego para obtener las relaciones entre las amplitudes de los campos eléctricos, primero ocuparemos la condicion de borde en z=0.

Caso 2 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = 0) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z = 0)$

Se tendrá una condición de conductividad infinita, eso implicara que no existirá onda transmitida y por lo tanto se tendrá directamente que $E_3 = 0$, es decir:

$$(E_2^+ e^{jw_ot} e^{-jk_1 \cdot 0} + E_2^- e^{jw_ot} e^{jk_1 \cdot 0}) = E_3 = 0 \tag{27}$$
$$E_2^+ + E_2^- = 0 \tag{28}$$
$$E_2^+ = -E_2^- \tag{29}$$

Lo cual es consistente con el hecho de que no se esta transmitiendo campo eléctrico en el medio 3, por lo que las amplitudes incidente y reflejada deben ser iguales y por tanto no existe perdida. Luego deberemos obtener mas ecuaciones para poder encontrar las expresiones particulares de los campos eléctricos, esto se logra relacionando las ecuaciones de intensidad magnética, y teniendo en consideración que son perpendiculares:

Intensidad de campo magnético para ambos medios

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = Y_0(\widehat{\boldsymbol{k}}) \times (E_1^+ e^{jw_ot} e^{-jk_0z})(\widehat{\boldsymbol{i}}) + Y_0(-\widehat{\boldsymbol{k}}) \times (E_1^- e^{jw_ot} e^{jk_0z})(\widehat{\boldsymbol{i}}) \tag{30}$$

Dado que sabemos que la propagación va en $\widehat{\boldsymbol{z}}$, luego se tendrá que H deberá ir en $\widehat{\boldsymbol{j}}$, lo cual es consistente con la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = (Y_0 E_1^+ e^{jw_ot} e^{-jk_0z} - Y_0 E_1^- e^{jw_ot} e^{jk_0z})(\widehat{\boldsymbol{j}}) \tag{31}$$

Análogamente se tiene que para el medio 2

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = (Y_1 E_2^+ e^{jw_ot} e^{-jk_1z} - Y_1 E_2^- e^{jw_ot} e^{jk_1z})(\widehat{\boldsymbol{j}}) \tag{32}$$

Bajo el mismo argumento anterior tendremos que las intensidades de campo magnético deberán ser iguales y por lo tanto:

Caso 2 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_1(z = -d) = \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z = -d)$ Utilizando la igualdad se obtiene que:

$$(Y_0 E_1^+ e^{jk_0d} - Y_0 E_1^- e^{-jk_0d}) = (Y_1 E_2^+ e^{jk_1d} - Y_1 E_2^- e^{-jk_1d}) \tag{33}$$

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0d} - E_1^- e^{-jk_0d}) - Y_1(E_2^+ e^{jk_1d} - E_2^- e^{-jk_1d}) = 0 \tag{34}$$

Dada la expresión general, nos enfocaremos en el caso particular d= $\lambda/4$, por lo que reemplazando sobre las ecuaciones anteriores y recordando que:

$$k = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{35}$$

Luego

$$d \cdot k = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \tag{36}$$

Por lo que tenemos que:

$$e^{\pm j \frac{\pi}{2}} = \pm j \tag{37}$$

Por lo que reemplazando en la ecuación (26) (con la relación de los campos eléctricos) se obtiene:

$$E_1^+ j - E^- j = E_2^+ j - E_2^- j \tag{38}$$
$$E_1^+ - E^- = E_2^+ - E_2^- \tag{39}$$

Pero anteriormente se verifico que $E_2^- = -E_2^+$, por lo que reemplazando tenemos:

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{40}$$

Por otro lado tenemos que para la intensidad de campo magnético y evaluando el valor obtenido para las exponenciales complejas en z = d, se tiene que:

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) = Y_1(E_2^+ e^{jk_1 d} - E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{41}$$
$$Y_0(E_1^+ j + E_1^- j) = Y_1(E_2^+ j + E_2^- j) \tag{42}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) \tag{43}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) = 0 \tag{44}$$
$$E_1^+ = -E_1^- \tag{45}$$

Tenemos además que $E_1^+ = E_0$ por lo tanto:

$$E_0 = -E_1^- \tag{46}$$

De esta forma,

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{47}$$
$$E_0 + E_0 = 2E_2^+ \tag{48}$$
$$E_0 = E_2^+ \tag{49}$$

Finalmente los campos serán de la siguiente forma (Utilizaremos las expresiones de seno y coseno vistas en el resumen):

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) = E_0 e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jk_0 z} \tag{50}$$
$$= E_0 e^{-jk_0 z} - E_0^- e^{jk_0 z} \tag{51}$$
$$= E_0(e^{-jk_0 z} - e^{jk_0 z}) \tag{52}$$
$$= -2jE_0 \sin(k_0 z) \tag{53}$$

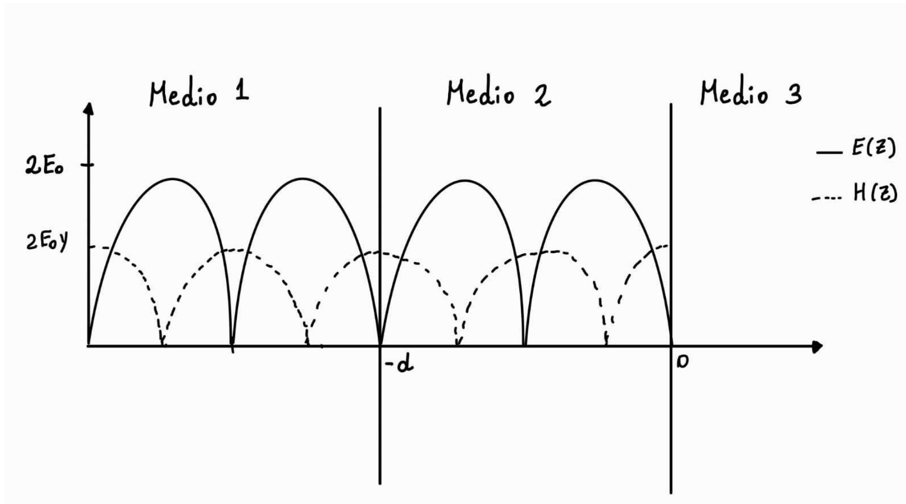
$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z) = E_2^+ e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jk_1 z} \tag{54}$$
$$= E_2^+ e^{-jk_1 z} - E_2^+ e^{jk_1 z} \tag{55}$$
$$= E_2^+(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) \tag{56}$$
$$= -2jE_0 \sin(k_1 z) \tag{57}$$

Por otro lado para la intensidad de campo magnético tenemos que:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1(z) = Y_0 E_1^+ e^{-jk_0 z} - Y_0 E_1^- e^{jk_0 z} \tag{58}$$
$$= Y_0 E_0^+ e^{-jk_0 z} + Y_0 E_0^- e^{jk_0 z} \tag{59}$$
$$= Y_0 E_0(e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z}) \tag{60}$$
$$= 2Y_0 E_0 \cos(k_0 z) \tag{61}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z) = Y_1 E_2^+ e^{-jk_1 z} - Y_1 E_2^- e^{jk_1 z} \tag{62}$$
$$= Y_1 E_2^+ e^{-jk_0 z} + Y_1 E_2^- e^{jk_0 z} \tag{63}$$
$$= Y_1 E_0 (e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z}) \tag{64}$$
$$= 2Y_1 E_0 \cos(k_1 z) \tag{65}$$

Con lo que se obtienen finalmente los campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t)$ y $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t)$ para ambos medios, luego graficando tenemos lo siguiente:



(b) Se busca determinar el coeficiente de reflexión en Γ,lo obtendremos de manera general (Es posible obtenerlo directamente de lo visto anteriormente, pero por completitud se obtendrá la expresión general), por lo que volviendo sobre las ecuaciones anteriores:

$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{66}$$

De las relaciones anteriores se obtiene ($E_2^- = E_2^+$),

$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{67}$$
$$= 2jE_2^+ \sin(k_1 d) \tag{68}$$
$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = 2jE_2^+ \sin(k_1 d) \tag{69}$$

En relación a la intensidad de campo magnético.

$$Y_0 E_0 e^{jk_0 d} - Y_0 E_1^- e^{-jk_o d} = 2Y E_2^+ \cos(k_1 d) \tag{70}$$

Recordemos que el coeficiente de reflexión vendrá dado por

$$\Gamma(z) = \frac{E_1^- e^{-jk_o z}}{E_1^+ e^{jk_o z}} \tag{71}$$
$$= \frac{E_1^-}{E_1^+} e^{-j2k_0 d} \tag{72}$$

Es por esto que nos interesa dejar esta relación en términos de expresiones conocidas, en particular de E_1^- con respecto a $E_0 = E_1^+$, por lo que debemos despejar el termino reflejado (E_1^-) dividiendo las ecuaciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}}{Y_0(E_0 e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_o d})} = \frac{1}{Y_1} jtan(k_1 d) \tag{73}$$

Luego despejando E_1^- tendremos la siguiente expresión:

$$E_1^- = E_0 e^{j2k_0 d} \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) + 1\right)} \tag{74}$$

Que reemplazando sobre la ecuación del coeficiente de reflexión:

$$\Gamma(z = d) = \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) + 1\right)} \tag{75}$$

Donde utilizando la siguiente relación:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \qquad\qquad Y_1 = \frac{1}{Z_1} \tag{76}$$

Tal que la expresión:

$$\Gamma(z = d) = \frac{jZ_1 tg(k_1 d) - Z_0}{jZ_1 tg(k_1 d) + Z_0} \tag{77}$$

Se obtiene una expresión muy útil que se utilizara mas adelante *(En la siguiente unidad)*, y nos da una expresión que permite obtener el coeficiente de reflexión en cualquier punto que sea de interés, por ahora nos reduciremos a evaluarla en $d = \lambda/4$ por lo que se obtiene:

$$\Gamma(z = \frac{\lambda}{4}) = \frac{jZ_1 tg(k_1 \frac{\lambda}{4}) - Z_0}{jZ_1 tg(k_1 \frac{\lambda}{4}) + Z_0} \tag{78}$$

$$= 1 \tag{79}$$

Luego, tendremos que cuando $d = \frac{\lambda}{4}$, el modulo de las amplitudes del campo reflejado y transmitido son iguales y en la misma fase con respecto a la onda incidente.

(c) Se busca obtener la densidad de potencia (Por unidad de área en plano xy) por tanto se utilizara el vector de Poynting tal que:

$$P_1^+ = \frac{1}{2} Re(E_1^+ \times H_1^{+*})\hat{k} \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0 e^{-jk_0 z} \times Y_0 E_0 e^{jk_0 z}) \tag{81}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0^2 Y_0) \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 Y_0 \tag{83}$$

De manera similar tenemos que para la potencia reflejada:

$$P_1^- = \frac{1}{2} Re(E_1^- \times H_1^{-*})(-\hat{k}) = \frac{1}{2} Y_0 E_0^2 \tag{84}$$