Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 4
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1. Los potenciales en los cuatro lados de una estructura de electrodos rectangular se muestran en la figura 1 ¿Cuál es la forma de la solución a la ecuación de Laplace? El potencial tendrá la siguiente forma:

$$V = (a_x \cosh k_x x + b_x \sinh k_x x)(a'_y \cos k_y y + b'_y \sin k_y y) \tag{1}$$

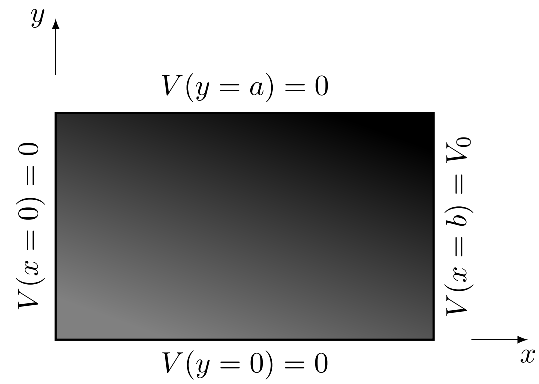

Figura 1: Estructura rectangular con valores de potencial asociados (pregunta 1).

Solución:

Notemos que nos dan la forma del potencial en la ecuación (1). La condición de frontera $V=0$ en $x=0$ requiere que $a_x=0$. Además, $V=0$ en $y=0$ implica que $a'_y=0$. Por lo tanto, la ecuación (1) se convierte en:

$$V = C_n \sinh(k_x x)\sin(k_y y) \tag{2}$$

Donde hemos combinado las constantes b_x y b'_y, tales que $C_n = b_x b'_y$. Además, observamos la relación $k_x^2 + k_y^2 = 0$ implica que $k_z^2 = -k_y^2$, y las magnitudes de k_x y k_y deben ser iguales; es decir, $k_x = k_y = k$, y la forma requerida de la solución se convierte en:

$$V = C_n \sinh(kx)\sin(ky) \tag{3}$$

Ahora se aplicarán condiciones de borde para encontrar la soluciöon completa. A partir de la condición de frontera $V=0$ en $y=a$ para todos los valores de $x(0<x<b)$ obtenemos:

$$\sin(ka) = 0 \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{a} \tag{4}$$

donde n es un entero. Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (1) obtenemos:

$$V = C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{5}$$

Sabemos que n es un entero. Por lo tanto, la solución general será una suma de todas las soluciones posibles:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{6}$$

Para satisfacer la condición en $x = b$, debemos encontrar C_n. En $x = b$, $V = V_0$:

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{7}$$

O reescribiendo ecuación (7) como una serie de Fourier:

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = f(y) \tag{8}$$

Donde

$$a_n = C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{9}$$

Sabemos que Y va desde 0 hasta a, por lo que conocemos L y lo unico a determinar será la integral:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy \tag{10}$$

Luego a_n quedará como:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases} \tag{11}$$

Finalmente, por lo tanto:

$$C_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \tag{12}$$

y sustituyendo ecuación (12) en la ecuación (7) obtenemos la solución final queda como:

$$V = \sum_{\text{n par}} \frac{4V_0 \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{13}$$

2. Considere una esfera maciza de radio a con carga desconocida en la figura 2, la cual se encuentra totalmente inmersa en un fluido que posee una densidad volumétrica de carga con simetría radial dada por $\rho\,(r) = -\epsilon_0$ k^2 $V(r)$ (r > a) donde k es una constante, ϵ_0 la permitividad del vacío y $V(r)$ el potencial eléctrico. Experimentalmente se ha determinado que el potencial en el borde de la esfera es V_0 con respecto al infinito $(V(\infty) = 0)$ y la distribución volumétrica de carga dentro de la esfera es uniforme.

   (a) Determine la densidad de carga $\rho(r)$ y el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio. Hint: Definir $W = rV\,(r)$ puede ser útil.

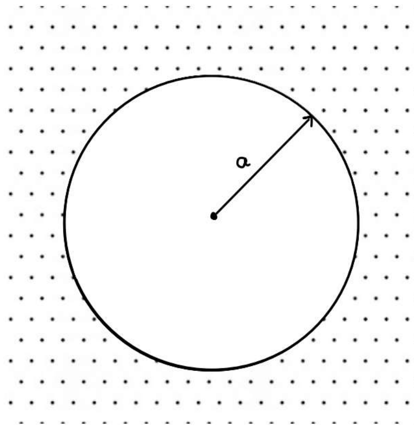

Figura 2: Esfera sumergida en un fluido.

Solución:

(a) Caso r > a: Sea la figura vista en el enunciado se busca obtener tanto la densidad $\rho(r)$ y el potencial eléctrico V_r, pero a diferencia de lo visto con anterioridad debemos tener en cuenta que en esta ocasión si tenemos presencia de una densidad de carga, es por esto que no podremos utilizar Laplace de manera directa y debemos recurrir a la ecuación de Poisson: (se tiene de manera directa que el potencial magnético dependerá de una sola variable debido a la geometría y se utilizarán coordenadas esféricas):

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = k^2 V(r) \tag{14}$$

Vemos que en esta ocasión a diferencia de todo lo visto con anterioridad no es directo el cálculo y en general cuando se tenga presencia de una densidad de carga no es trivial la solución y debemos recurrir a técnicas matemáticas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = k^2 W(r) \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-r^{-2}W(r) + r^{-1}\frac{\partial W(r)}{\partial r}\right)\right) = rk^2 W(r) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-W(r) + r\frac{\partial W(r)}{\partial r}\right) = rk^2 W(r) \tag{17}$$

$$\frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W(r)}{\partial r}\right) = rk^2 W(r) \tag{18}$$

$$\frac{\partial W(r)}{\partial r} - \frac{\partial W(r)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} = rk^2 W(r) \tag{19}$$

$$r\frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} = rk^2 W(r) \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} - k^2 W(r) = 0 \tag{21}$$

En este punto se logra identificar que corresponde a una EDO de segundo orden y se resolverá de manera directa, es decir, de la siguiente manera: (dada la estructura se proponen soluciones armónicas del tipo $W\left(r\right) = e^{\beta r}$):

$$\frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} - k^2 W(r) = 0 \tag{22}$$

$$\beta^2 e^{\beta r} - k^2 e^{\beta r} = 0 \tag{23}$$

$$e^{\beta r}(\beta^2 - k^2) = 0 \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Lo que da soluciones del tipo $\beta \pm k$ por lo que tenemos que:

$$W(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr} \tag{26}$$

Lo que permite volver sobre el reemplazo inicial permitiendo obtener lo siguiente:

$$V(r) = \frac{1}{r}\left(Ae^{kr} + Be^{-kr}\right) \tag{27}$$

Luego debemos obtener las condiciones de borde con el fin de poder obtener ambas constantes:

Primera condición de borde

$$V(r = a) = V_0 = \frac{1}{a}(Ae^{ak} + Be^{-ak}) \tag{28}$$

Segunda condición de borde

Como no tenemos mucha información y el potencial se calcula con respecto al infinito luego:

$$V(r \to \infty) = 0 = \frac{1}{a}(Ae^{rk} + Be^{-rk}) = \frac{1}{a}(Ae^{rk}) \tag{29}$$

Luego para que la ecuación sea consistente tendremos que necesariamente se deberá cumplir que A=0, lo que permite luego de manera directa en base a la primera condición de borde que:

$$aV_0 e^{ak} = B \tag{30}$$

Se puede expresar el potencial como:

$$V(r) = \frac{1}{r} \cdot aV_0 e^{ak} \cdot e^{-kr} = \frac{aV_0 e^{k(a-r)}}{r} \tag{31}$$

Por lo que finalmente se tendrá que la densidad de carga vendrá expresada como:

$$\rho(r) = \frac{-k^2 \epsilon_0 a V_0 e^{k(a-r)}}{r} \tag{32}$$

Caso r < a

Luego debemos analizar lo que sucede dentro de la esfera y es importante considerar que por enunciado se cumple que la distribución de la carga volumétrica es uniforme y por lo tanto podemos definir una densidad constante ρ, luego utilizando Ley de Gauss tal que: (consideramos una superficie esférica):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, d\tau \tag{33}$$

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, se tendrá directamente que:

$$\mathbf{E}(r)4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi r^3}{3} \tag{34}$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{r}} \tag{35}$$

Luego igualando el campo obtenido con la ley de Gauss, con el campo obtenido a partir del potencial (aplicando $\mathbf{E} = -\nabla(V)$), en el borde de la esfera (r = a) se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{aV_0 e^{k(a-r)}}{r}\right) \\
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= -V_0 a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{k(a-r)}}{r}\right) \\
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= -V_0 a\left(e^{k(a-r)}\left(\frac{-k}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\right) \\
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= V_0 a e^{k(a-r)}\left(\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \\
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= V_0 a\left(\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \\
\frac{\rho a}{3\epsilon_0} &= \frac{V_0 a(ka+1)}{a^2} \quad \text{(al sustituir } r = a\text{)} \\
\rho &= \frac{V_0 3\epsilon_0(ka+1)}{a^2}
\end{aligned}$$

Notamos que es constante por lo que es consistente con lo esperado, luego tendremos que el campo eléctrico para r<a vendrá dado por:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{r}} \tag{36}$$

$$= \frac{V_0(ka+1)r}{a^2}\widehat{\boldsymbol{r}} \tag{37}$$

Utilizando la expresión integral para el potencial tenemos que:

$$V(r) - V(r=a) = -\int_a^r \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_r^a \frac{V_0(ka+1)r}{a^2}\,\mathrm{d}r \tag{38}$$

$$V(r) - V_0 = -\int_r^a \frac{V_0(ka+1)r}{a^2}\,\mathrm{d}r \tag{39}$$

$$V(r) = V_0 - \frac{V_0(ka+1)(a^2-r^2)}{2a^2} \tag{40}$$

Por lo que finalmente se obtiene lo buscado para todo el espacio.