**Electromagnetismo Aplicado** (EL3103)
**Clase auxiliar 3**

Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Considere un condensador (*capacitor*) cuyo dieléctrico de permitividad $\epsilon$ está limitado por dos esferas concéntricas de radios $a$ y $b$ y dos conos equipotenciales de semi ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ como se indica en la figura 1:
   (a) Obtenga el potencial $V(r, \theta, \phi)$.
   (b) Campo eléctrico $\mathbf{E}$.
   (c) Capacitancia $C$ a partir de la carga.
   (d) Capacitancia $C$ a partir de la energía.

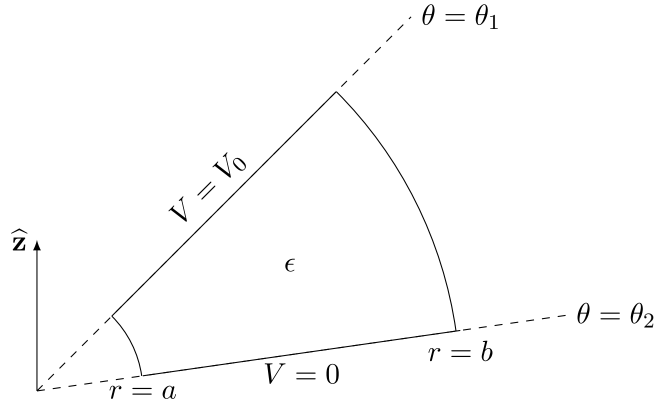


Figura 1: Sección transversal línea de transmisión. Pregunta 1.

**Solución:**

(a) Se busca obtener el potencial escalar eléctrico $V$. Se observa que es conveniente utilizar coordenadas esféricas, además que el potencial eléctrico dependerá solo de $\theta$ y que tampoco existe densidad de carga libre $\rho$, por lo tanto utilizaremos la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \tag{1}$$

Debido a la dependencia en una sola componente para el potencial se tiene lo siguiente:

$$\nabla^2 V(\theta) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta} = A \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{A}{\sin(\theta)} \tag{4}$$

$$V(\theta) = A \ln\left(\tan(\theta/2)\right) + B \tag{5}$$

De tal manera se obtiene la forma del potencial eléctrico $V$. Luego debemos utilizar las condiciones de borde para obtener las constantes que caracterizan este sistema, al ser solo un medio se simplifica el calculo, para la primera condición se tiene:

$$V\left(\theta=\theta_1\right)=V_0=A\ln\big(\tan(\theta_1/2)\big)+B \tag{6}$$

Para la segunda condición de borde:

$$V\left(\theta=\theta_2\right)=0=A\ln\big(\tan(\theta_2/2)\big)+B \tag{7}$$

Luego despejando las constantes obtenemos lo siguiente:

$$A=\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \tag{8}$$

$$B=-\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta_2/2)) \tag{9}$$

Obteniendo la forma particular del $V(\theta)$:

$$V(\theta)=A\ln(\tan(\theta/2))+B \tag{10}$$

$$=\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta/2))-\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta_2/2)) \tag{11}$$

(b) Se busca obtener el potencial del campo eléctrico $\mathbf{E}$ el cual se puede obtener de manera directa mediante el campo escalar eléctrico y el hecho de que $\mathbf{E}$ es conservativo, por tanto:

$$\mathbf{E}=-\nabla V(\theta) \tag{12}$$

Se deberá tener en cuenta que estamos en coordenadas esféricas por lo que tendremos lo siguiente:

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{13}$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta/2))-\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\ln(\tan(\theta_2/2))\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{14}$$

$$=\frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{d}{d\theta}\big(\ln(\tan(\theta/2))\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{15}$$

$$=\frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{\tan(\theta/2)}\frac{d}{d\theta}\big(\tan(\theta/2)\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16}$$

$$=\frac{-1}{2r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{17}$$

$$=\frac{-1}{r}\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{18}$$

$$=\frac{-1}{r}\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}\frac{1}{\sin(\theta)}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{19}$$

Finalmente se obtiene el campo eléctrico en base al potencial $V$, es importante notar que si bien el potencial era una función de $\theta$, el campo eléctrico no dependerá de esta sola componente necesariamente y podrá depender de más. Como es el caso obtenido, el cual dependerá tanto de $r$ como de $\theta$ tal que $\mathbf{E}(r, \theta)$.

(c) Se busca obtener la capacitancia $C$ en base a la carga, es importante notar que este término deberá estar expresado en constantes geométricas del material y no en alguna dependencia de una variable (puede ser un buen indicador para saber si el ejercicio está correcto.)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{20}$$

Sabemos que la diferencia de potencial entre ambas placas corresponderá a $\Delta V = V_0$, y también que $C = \frac{Q}{V_0}$, utilizando el hecho de que la densidad de carga superficial será equivalente al desplazamiento evaluado en esa superficie se tiene lo siguiente por Gauss (recordar relación entre la densidad superficial y el desplazamiento eléctrico):

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} && (21)\\ &= \int \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} && (22) \end{aligned}$$

Como estamos en coordenadas esféricas y sabemos que el desplazamiento como el campo eléctrico se encuentran en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ luego $\mathrm{d}a = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$, por lo que:

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon \int \frac{-1}{r} \frac{V_0}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) && (23)\\ &= -\frac{V_0\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \int_0^{2\pi} \int_a^b \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi && (24)\\ &= -\frac{V_0\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} (2\pi)(b-a) && (25) \end{aligned}$$

Finalmente se tendrá que:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{(a-b)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)}. \tag{26}$$

(d) Se busca el obtener la capacitancia desde un punto de vista energético, esto se puede relacionar con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}CV^2 = \int \frac{1}{2}\epsilon\|\mathbf{E}\|^2\,\mathrm{d}\tau \tag{27}$$

$$CV_0^2 = \epsilon\int \frac{1}{r^2}\frac{V_0^2}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2}\frac{1}{\sin(\theta)^2}r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{28}$$

$$C = \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sin(\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{29}$$

$$= \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)^2}(b-a)2\pi\ln\left(\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right) \tag{30}$$

$$= -\frac{(b-a)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} = \frac{(a-b)2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right)} \tag{31}$$

Obteniendo la capacitancia desde la energía y desde la carga se obtiene el mismo resultado, lo que indica que el ejercicio fue resuelto de manera correcta.

2. Una densidad $\mathbf{J} = J_0\widehat{\boldsymbol{z}}$ origina un potencial magnético vectorial en la figura 2:

$$\mathbf{A} = \frac{-\mu_0 J_0}{4}(x^2+y^2)\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{32}$$

(a) Use la ecuación de Poisson vectorial para comprobar el enunciado.

(b) Mediante $\mathbf{A}$ calcule el campo magnético $\mathbf{B}$.

(c) Utilice $\mathbf{J}$ y la ley de Ampère para calcular nuevamente $\mathbf{B}$, compare los resultados.

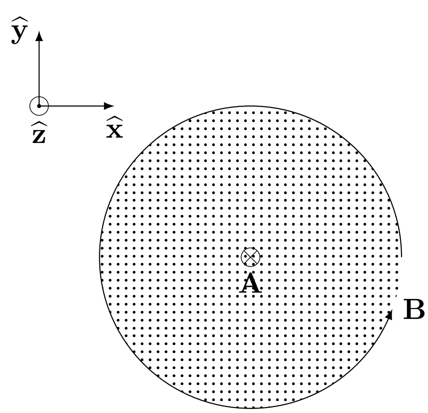


Figura 2: Campo magnético ilustrado para pregunta 2.

**Solución:**

(a) Sea una densidad de corriente $\mathbf{J}= J_0\widehat{\mathbf{z}}$, el cual originará un potencial magnético. Este último se produce debido a las relaciones entre las ecuaciones de Maxwell-Heaviside y al hecho que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$

(ecuación ii, sin nombre), para un espacio bien definido permitirá que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Luego $\mathbf{A}$ estará dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{-\mu_0 J_0}{4}(x^2 + y^2)\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{33}$$

Se comprobará que $\mathbf{A}$ es el potencial de $\mathbf{J}$, mediante la siguiente relación:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 J_0 \tag{34}$$

Realizando el análisis por componente se tendrá que el campo vectorial $\mathbf{A}$ tiene componentes solo en $\widehat{\boldsymbol{z}}$, esto se observa de manera directa

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \tag{35}$$
$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \tag{36}$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{37}$$

Donde $A_x = 0$ y $A_y = 0$, a diferencia de la componente $\widehat{\boldsymbol{z}}$. Calculando $\nabla^2 \mathbf{A}$ tenemos que:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 z} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} + \frac{-\mu_0 J_0}{2} + 0 = -\mu_0 J_0. \tag{38}$$

Por tanto se comprueba finalmente que el campo vectorial $\mathbf{A}$ es el potencial de $\mathbf{J}$.

(b) En base a lo anterior se busca obtener el campo magnético $\mathbf{B}$ mediante $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{39}$$

Para obtener el campo magnético se usará la siguiente relación:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} & \widehat{\boldsymbol{y}} & \widehat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \tag{40}$$

Calculando el rotor se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\partial A}{\partial y}\widehat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial A}{\partial x}\widehat{\boldsymbol{y}} + 0\widehat{\boldsymbol{z}} && (41) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\mu_0 J_0 (x^2 + y^2)}{4}\right)\widehat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\mu_0 J_0 (x^2 + y^2)}{4}\right)\widehat{\boldsymbol{y}} && (42) \\ &= \frac{-\mu_0 J_0}{2}(y\widehat{\boldsymbol{x}} - x\widehat{\boldsymbol{y}}) && (43) \end{aligned}$$

Obteniendo así el campo magnético $\mathbf{B}$ mediante $\mathbf{A}$.

(c) Se busca obtener $\mathbf{B}$ mediante la ley de Ampère, para ello se tiene lo siguiente:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{44}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = I_{\text{enc}} \tag{45}$$

Dada la geometría que presenta el sistema, es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas con una circunferencia de radio $r$.

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} \mu_0 J_0 \, \mathrm{d}a \tag{46}$$

$$B \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\theta = \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta) \tag{47}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 J_0 \pi r^2 \tag{48}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{49}$$

Se observa además que es equivalente al anterior, esto se logra demostrar realizando un cambio de coordenadas conveniente.

$$\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} (y\widehat{\boldsymbol{x}} - x\widehat{\boldsymbol{y}}) \tag{50}$$

Realizando el cambio a coordenadas cilíndricas tenemos lo siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 J_0}{2} \left[ r\sin(\theta)\widehat{\boldsymbol{x}} - r\cos(\theta)\widehat{\boldsymbol{y}} \right] = \frac{-\mu_0 J_0 r}{2} \left[ \sin(\theta)\widehat{\boldsymbol{x}} - \cos(\theta)\widehat{\boldsymbol{y}} \right] = \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \widehat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{51}$$

3. Dos barras macizas de sección rectangular se alinean tal que las caras próximas entre las barras son planas y oblicuas, formando los diferentes ángulos mostrados en la figura 3 y con una diferencia de potencial escalar magnético $IN$. Las caras oblicuas son de longitud $L$ y ancho $b$. El espacio entre las caras oblicuas se llena con dos materiales de constantes magnéticas $\mu_1$ y $\mu_2$ se debe obtener lo siguiente:
   (a) Obtenga una expresión explícita para el potencial escalar magnético $V_m$ así como para $H_i$ $(i = 1, 2)$ en los diferentes medios.
   (b) Obtenga el valor de la inductancia (considere que la corriente $I_0$ es producida por un devanado tal que pueda utilizar la expresión conocida).
   (c) Obtenga la energía magnética total del sistema.

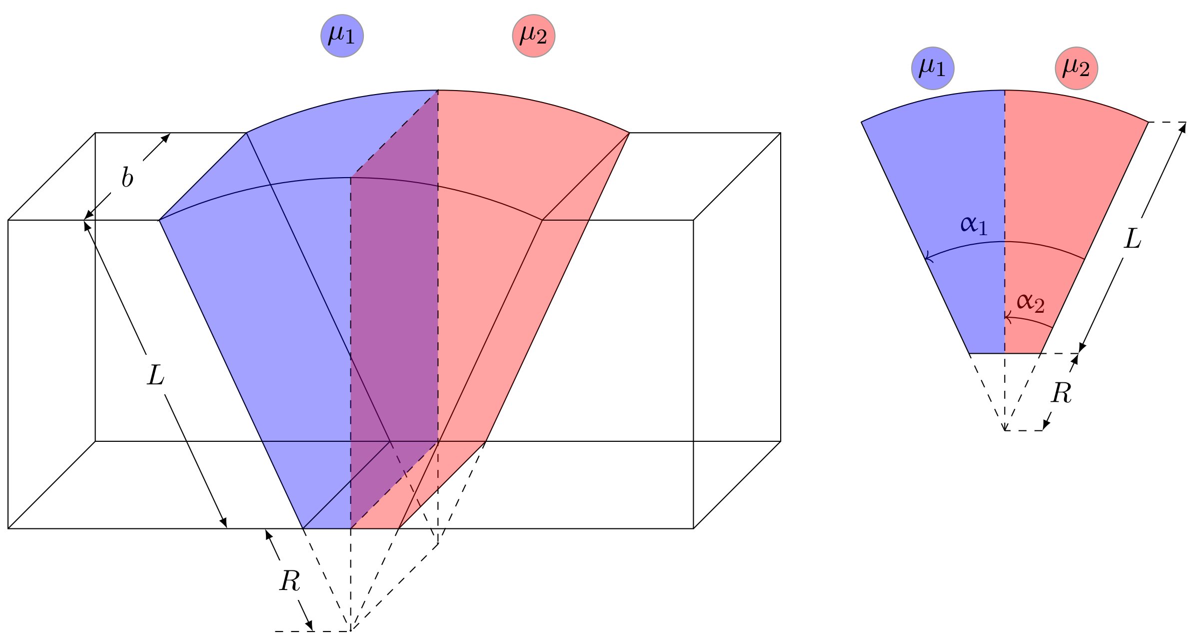

Figura 3: Esquema pregunta 3. El bosquejo de la derecha está compuesto de dos materiales (destacado con azul y rojo). La sección de la izquierda muestra el material en tres dimensiones, y la derecha muestra la distribución angular del corte.

**Solución:**

(a) Dado el esquema se considerará una equivalencia a una **fuente de voltaje desde el punto de vista magnético**, lo que permitirá generar así un potencial escalar magnético entre ambos medios y por tanto el definir un $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$, luego:

$$\mathbf{H}_i = -\nabla V_{mi} \tag{52}$$

De esta manera se debe encontrar la expresión para el potencial magnético. Además, analizar qué dirección presentará este y qué tipo de coordenadas es el adecuado para trabajar. Dada la geometría lo más recomendado a utilizar es coordenadas cilíndricas y que el potencial dependa solo de $V_{mi}(r, \theta, z) = V_{mi}(\theta)$, luego se tendrá:

$$\nabla^2 V_{mi}(\theta) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V_{mi}}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{53}$$

Luego encontramos una expresión general para dicho campo magnético, tal que:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V_{mi}}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2 V_{mi}}{\partial \theta^2} = 0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial V_{mi}}{\partial \theta} = A \tag{56}$$

$$V_{mi}(\theta) = A\theta + B \tag{57}$$

Se debe considerar los dos medios que presentes, por tanto:

$$V_{m1}(\theta) = A\theta + B \tag{58}$$

$$V_{m2}(\theta) = C\theta + D \tag{59}$$

Encontradas las ecuaciones generales para el potencial magnético, se ocuparán las condiciones de borde para encontrar las constantes que caracterizan el sistema.

Condición para $\theta = \alpha_1$

$$V_{m1}(\theta = \alpha_1) = NI = A\alpha_1 + B \tag{60}$$

Condición para $\theta = 0$

$$V_{m2}(\theta = 0) = C \cdot 0 + D = 0 \tag{61}$$

Condición de continuidad para $\theta = \alpha_2$

$$V_{m1}(\theta = \alpha_2) = V_{m2}(\theta = \alpha_2) \tag{62}$$

Condiciones de borde entre ambos medios

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla V_{m1}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \mathbf{H}_2 = -\nabla V_{m2}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{63}$$

$$= -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_{m1}}{\partial \theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \qquad = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_{m2}}{\partial \theta}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{64}$$

$$= -\frac{1}{r}A\widehat{\boldsymbol{\theta}} \qquad = -\frac{1}{r}C\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{65}$$

Luego por condiciones de borde tenemos:

$$\mathbf{B}_1^{\perp} = \mathbf{B}_2^{\perp} \tag{66}$$

Dado a que todo el campo magnético va solo en la componente normal se logra simplificar a lo siguiente:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \tag{67}$$

$$\mathbf{B}_1\mu_1 = \mathbf{B}_2\mu_2 \tag{68}$$

$$-\frac{1}{r}A\mu_1 = -\frac{1}{r}C\mu_2 \tag{69}$$

$$A\mu_1 = C\mu_2 \tag{70}$$

Con lo que se obtienen las 4 incógnitas que permiten el despeje para una expresión explícita del potencial escalar magnético para ambos medios, por tanto despejando las constantes se tiene que:

$$A = \frac{NI\mu_2}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{71}$$

$$B = NI - \frac{NI\mu_2\alpha_1}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{72}$$

$$C = \frac{NI\mu_1}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{73}$$

$$D = 0 \tag{74}$$

Finalmente se obtiene las expresiones explícitas para los campos tal que:

$$V_{m1}(\theta) = \frac{NI\mu_2\theta}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} + NI - \frac{NI\mu_2\alpha_1}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{75}$$

$$V_{m2} = \frac{NI\mu_1\theta}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \tag{76}$$

$$\mathbf{H}_1(r) = -\frac{1}{r}\left(\frac{NI\mu_2}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{77}$$

$$\mathbf{H}_2(r) = -\frac{1}{r}\left(\frac{NI\mu_1}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{78}$$

(b) Se busca obtener la inductancia del sistema, la cual viene dada por:

$$L = N\frac{\Phi_B}{I} \tag{79}$$

Además, es importante destacar que el flujo magnético, $\Phi_B$, será equivalente para ambos materiales debido a las condiciones de borde $B_1 = B_2$, por lo que será equivalente calcularla para un medio u otro, donde se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Phi_{B1} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B_1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} && (80)\\
&= \int_0^b \int_R^{R+L} \mu_1 \mathbf{H}_1 \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) && (81)\\
&= \int_0^b \int_R^{R+L} \mu_1 - \frac{1}{r} A\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z && (82)\\
&= -\mu_1 Ab \int_R^{R+L} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}r && (83)\\
&= \mu_1 Ab \ln\left(\frac{R}{R+L}\right) && (84)\\
&= \mu_1 \frac{NI\mu_2}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} b \ln\left(\frac{R}{R+L}\right) && (85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{B2} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B_2} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} && (86)\\
&= \int_0^b \int_R^{R+L} \mu_2 \mathbf{H}_2 \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) && (87)\\
&= \int_0^b \int_R^{R+L} \mu_2 - \frac{1}{r} C\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z && (88)\\
&= -\mu_2 Cb \int_R^{R+L} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}r && (89)\\
&= \mu_2 Cb \ln\left(fracRR + L\right) && (90)\\
&= \mu_2 \frac{NI\mu_1}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} b \ln\left(\frac{R}{R+L}\right) && (91)
\end{aligned}$$

Con lo que se logra verificar la equivalencia entre utilizar $B_1$ o $B_2$, con lo que reemplazando sobre la expresión de la inductancia se tendrá:

$$L = N\frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_2\mu_1 N^2}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)} b \ln\left(\frac{R}{R+L}\right) \tag{92}$$

(c) Se busca obtener la energía total del sistema, para ello se debe considerar la energía en ambos medios, por lo que se tiene lo siguiente:

$$w_{mi} = \frac{1}{2}\mu_i \mathbf{H}_i^2 \tag{93}$$

Dado que queremos la energía en un volumen, luego integramos definiendo sus limites de integración como:

$$W_{m1} = \frac{1}{2}\mu_1 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{H_1}(r)^2 \ \mathrm{d}\tau \tag{94}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_1 \iiint H_1(r)^2 r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}z \tag{95}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_1 \int_0^b \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_R^{R+L} A^2 \frac{1}{r^2} r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}z \tag{96}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_1 A^2 \int_0^b \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_R^{R+L} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}z \tag{97}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_1 A^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \ln\left(\frac{R+L}{R}\right) b \tag{98}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \ln\left(\frac{R+L}{R}\right) b \left(\frac{NI\mu_2}{\mu_1\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)^2 \tag{99}$$

De manera análoga tenemos que la energía en el otro medio vendrá dado por lo siguiente:

$$W_2 = \frac{1}{2}\mu_2 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{H}_2(r)^2 \, \mathrm{d}\tau \tag{100}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_2 \iiint \mathbf{H}_2(r)^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \tag{101}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_2 \int_0^b \int_0^{\alpha_2} \int_R^{R+L} C^2 \frac{1}{r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \tag{102}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_2 C^2 b \alpha_2 \ln\left(\frac{R+L}{R}\right) \tag{103}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_2 b \alpha_2 \ln\left(\frac{R+L}{R}\right) \left(\frac{NI\mu_1}{\mu_2\alpha_2 - \mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)^2 \tag{104}$$

Con lo que finalmente se puede obtener la energía total del sistema, la cual será la suma de ambas.