Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 2
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Introducción

Se definirá dos expresiones fundamentales para el desarrollo de los problemas posteriores. Estas corresponden a la ecuación de **Poisson** y **Laplace**. Siendo la primera la más general expresada de la siguiente manera:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Donde V lo denominaremos como el potencial y ρ la densidad de carga. Es importante tener en cuenta que esta carga considera tanto la densidad de **carga libre** como la **ligada**. Sea el caso en que no se tenga una densidad de carga en los medios a evaluar esta ecuación es posible reducirla a la denominada Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2}$$

La cual permite obtener una expresión para el potencial V según sea la geometría y coordenadas a utilizar. Además, presenta las siguientes características:

- El potencial posee solo una solución y es única.
- El potencial no tolera mínimos ni máximos locales y el valor en cierto punto del espacio es el promedio de los valores en la frontera.
- La solución es una función armónica.
- La ecuación cumple con la condición de linealidad.

Existen muchos métodos de resolución de estas ecuaciones, los cuales se irán viendo a lo largo de los ejercicios. Es importante utilizar las ecuaciones de Maxwell-Heaviside ya que, en base a los conceptos matemáticos será posible entender qué buscan expresar. Estas vienen dadas por:

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho_f} \qquad \text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}} \tag{3}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0} \qquad \text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}_f + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t}} \tag{4}$$

Además, se tendrán condiciones de borde que serán de utilidad para encontrar relaciones entre ecuaciones:

1. Campos eléctrico tangencial $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1^{\parallel} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2^{\parallel}$
2. Desplazamiento eléctrico normal $\mathcal{D}_1^{\perp} - \mathcal{D}_2^{\perp} = \sigma$
3. Intensidad de campo tangencial $\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\parallel} - \boldsymbol{\mathcal{H}}_2^{\parallel} = \kappa$

4. Campo magnético normal: $\mathcal{B}_1^{\perp} = \mathcal{B}_2^{\perp}$

Donde para la mayoría de casos se tendrá que la corriente superficial (κ) y la densidad de carga superficial (σ) se despreciará por simplificación.

Consejo para la resolución de problemas

- Recordar las expresiones de los campos eléctricos, potenciales, cargas, etc. vistos en electromagnetismo.
- Analizar la geometría del esquema y ver si es posible utilizar Laplace.
- Verificar qué tipo de coordenadas son acordes al problema.
- Es fundamental analizar la dirección del potencial eléctrico, dado que este nos dará la respuesta a qué tipo de coordenada/s dependerá este.
- Ver cuántos medios dispone el problema y separar por escenarios cada uno de estos.
- Analizar el problema para obtener las ecuaciones que hagan falta, esto para despejar las constantes, que luego nos permitan obtener una expresión para el potencial y el campo eléctrico.
- Ver si es posible aplicar condiciones de borde para el punto anterior.

2 Ejercicios

1. Para la estructura coaxial de la figura 1, de longitud d y diferencia de potencial V_0 entre los electrodos en $r = a$ y $r = c$, determinar:
   (a) Potencial $V(r)$ y campo E en los medios dieléctricos perfectos de permisividad ϵ_1 y ϵ_2.
   (b) Carga total Q en cada uno de los electrodos del condensador (demuestre que la magnitud es igual).
   (c) Energía acumulada en cada medio dieléctrico.

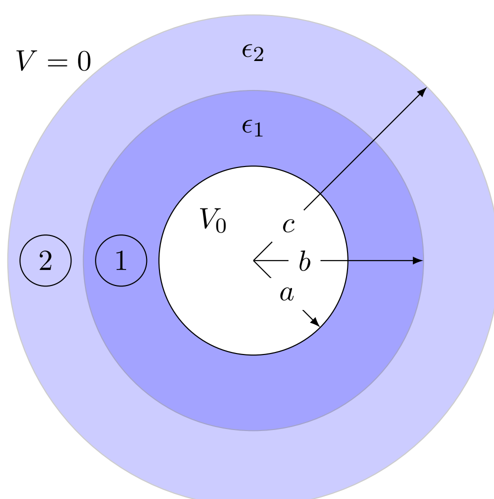

Figura 1: Estructura coaxial de pregunta 1.

Solución:

(a) Se menciona en el problema que la geométrica corresponde a un cilindro coaxial y por tanto será conveniente utilizar coordenadas cilindricas (debido a esto se observa que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ solo depende de $\widehat{\mathbf{r}}$ y no de alguna componente en $\widehat{\mathbf{z}}$ o $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$). Además, entre los medios notamos que no existe presencia de carga, esto implicará que el Laplaciano es igual a 0. Esto se deriva de Gauss en su forma diferencial, es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{5}$$

Se logra comprender del hecho de que cargas puntuales generan zonas de divergencia tanto positivas o negativas alrededor de ellas, pero si no hay cargas en nuestra zona de interés (dentro del cilindro) simplemente se asume que esas cargas son generadas de manera externa y podemos tener un flujo de entrada-salida constante (es decir, una divergencia nula). Luego definimos un potencial para el cual obtenemos su laplaciano en coordenadas cilindricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{6}$$

Además, se tiene que tanto cargas ligadas como cargas libres no están presente en los medios (despreciaremos las primeras), por lo tanto podemos hacer la densidad total nula (en base a esto se utiliza **Laplaciano**). Debido a que el campo dependerá de una sola componente dada la geometría se tendrá que:

$$\nabla^2 V(r,\theta,z) = \nabla^2 V(r) = 0 \tag{7}$$

Luego reemplazando se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{9}$$

$$\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = A \tag{10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r} \tag{11}$$

$$V(r) = A\int\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\right) + B \tag{12}$$

$$V(r) = A\ln(r) + B \tag{13}$$

Luego se obtiene la expresión para el potencial, pero con dos constante por determinar (estas asociadas a la EDO de segundo orden vistas anteriormente) por lo tanto, deberemos utilizar las condiciones de borde que nos entrega el enunciado, además de tener en consideración la presencia de ambos medios con sus propiedades asociadas. Es por esto que el potencial será diferente en estos y por tanto se genera el siguiente par de ecuaciones:

$$V_1(r=a) = A\ln(a) + B = V_0, \tag{14}$$

$$V_2(r=c) = C\ln(c) + D = 0. \tag{15}$$

Es importante a tener en cuenta que el potencial eléctrico *es continuo* y por lo tanto se cumplirá que $V_1(r=b) = V_2(r=b)$, y no confundir con el campo eléctrico donde este ultimo no siempre lo sera, de esta manera se obtiene otra ecuación tal que:

$$V_1(r=b) = V_2(r=b), \tag{16}$$

$$A\ln(b) + B = C\ln(b) + D. \tag{17}$$

Finalmente notamos que tenemos 4 incógnitas, pero solo 3 ecuaciones. Por tanto, debemos obtener alguna más, esto se logra del campo eléctrico debido a que se relaciona con su potencial de la siguiente manera:

$$E_1(r) = -\nabla V_1 = -\frac{A}{r}\widehat{\mathbf{r}}, \qquad\qquad E_2(r) = -\nabla V_2 = -\frac{C}{r}\widehat{\mathbf{r}}. \tag{18}$$

Luego utilizaremos la condición de borde asociada al desplazamiento eléctrico la cual viene expresada de la siguiente manera:

$$D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f \tag{19}$$

Pero dado que no tenemos carga libre luego se tendrá que $\sigma_f = 0$. Luego reemplazando los desplazamiento en base a lo obtenido con anterioridad

$$D_1^{\perp} = D_2^{\perp}, \tag{20}$$
$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2, \tag{21}$$
$$-\epsilon_1 \frac{A}{r} = -\epsilon_2 \frac{C}{r}, \tag{22}$$
$$\epsilon_1 A = \epsilon_2 C. \tag{23}$$

Finalmente se obtienen las 4 ecuaciones que permiten obtener las diferentes constantes de interés, con lo que despejando cada una de estas:

$$A = \epsilon_2 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \tag{24}$$
$$B = V_0 - A\ln(a) = V_0 + \frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \tag{25}$$
$$C = \frac{\epsilon_1 A}{\epsilon_2} = \epsilon_1 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \tag{26}$$
$$D = -\frac{\epsilon_1 A}{\epsilon_2}\ln(c) = \epsilon_1 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \ln(c) \tag{27}$$

Por lo que finalmente podemos obtener tanto los potenciales como su campo eléctrico para ambos medios

$$V_1(r) = A\ln(r) + B = \epsilon_2 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \ln(r) + V_0 + \frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \tag{28}$$

$$V_2(r) = C\ln(r) + D = \epsilon_1 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \ln(r) + \epsilon_1 \left(-\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \ln(c) \tag{29}$$

$$E_1(r) = -\nabla V_1 = \frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{r} (\widehat{\mathbf{r}}) \tag{30}$$

$$E_2(r) = -\nabla V_2 = \epsilon_1 \left(\frac{V_0}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \frac{1}{r} (\widehat{\mathbf{r}}) \tag{31}$$

(b) Se busca obtener la carga total Q en cada una de las placas de los electrodos, notamos que al ser un condensador ambas placas deberán tener en magnitud la misma carga, pero de signos opuestos. Sabemos que la densidad de carga superficial (que está distribuida**uniformemente** a través de la placa) viene dada por:

$$\sigma = \epsilon_1 E_1(a) \widehat{\mathbf{r}} = \frac{\epsilon_1}{a} \left(\frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \widehat{\mathbf{r}}. \tag{32}$$

Observación: Tenemos que al evaluar solo en el borde, por lo que tenemos que fijarnos en el diferencial a ocupar. Tambien notar de donde sale la formula anterior.

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, \mathrm{d}\tau = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}A \tag{33}$$

Donde al aplicar una integral de volumen a la forma diferencial de la ley de gauss y aplicando el teorema de la divergencia obtenemos lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, \mathrm{d}\tau = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}A = Q_{enc}/\epsilon_0 \tag{34}$$

Luego podemos despejar la carga superficial del cilindro coaxial:

$$Q_1 = \iint \sigma \, \mathrm{d}a = \iint \sigma(r) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = (\sigma) 2\pi a d \tag{35}$$

$$= \frac{\epsilon_1}{a} \left(\frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \cdot 2\pi a d = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 V_0 2\pi d}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)}. \tag{36}$$

En el segundo electrodo tenemos de manera análoga, considerando el signo opuesto de carga debido a las dirección de la superficie a integrar:

$$\sigma = -\frac{\epsilon_1}{c} \left(\frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \tag{37}$$

Para el valor de Q_2 se tiene que:

$$Q_2 = \iint \sigma \, \mathrm{d}a = \iint \sigma_{b2}(r) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = (\sigma) 2\pi c d \tag{38}$$

$$= -\frac{\epsilon_1}{c} \left(\frac{V_0 \epsilon_2}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \right) \cdot 2\pi c d = -\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 V_0 2\pi d}{\epsilon_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \tag{39}$$

Finalmente se observa que $|Q_1| = |Q_2|$ y con signos opuestos, es decir, lo esperado de manera teórica. Es decir si lo encerramos en una superficie gaussiana será congruente con que afuera del cilindro no existe campo electrico, es decir las cargas son de signos opuestos y de magnitud igual.

(c) Se busca obtener la energía asociada al campo **E** en cada medio dieléctrico, lo cual vendrá dada por lo siguiente expresión matemática:

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (r) \, . \tag{40}$$

Dada la expresión se observa que esta dependerá de cada medio en el cual estemos evaluando, por tanto haremos la división para cada medio. Recordemos que el campo eléctrico era:

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{-A}{r} \widehat{\mathbf{r}}. \tag{41}$$

Luego reemplazando en la ecuación de energía se obtiene:

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1 A^2}{r^2}. \tag{42}$$

Con lo que integrando sobre todo el volumen se tendrá que la energía total:

$$W_{e1} = \int_v w_{e1} dv = \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{A^2}{r^2} \frac{1}{2} \epsilon_1 \, \mathrm{d}r (r \, \mathrm{d}\theta) \, \mathrm{d}z = A^2 \pi d \epsilon_1 \int_a^b \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r = A^2 \pi d \ln\left(\frac{b}{a}\right) \epsilon_1. \tag{43}$$

Análogamente para el otro medio se obtendrá que:

$$W_{e2} = C^2 \pi d \ln\left(\frac{c}{b}\right) \epsilon_2 \tag{44}$$

2. Para el dispositivo magnético de la figura 2 con dos materiales de permeabilidad μ_1 y μ_2 y con $\mu \to \infty$ en el resto del dispositivo, con espesores d_1 y d_2 y sección transversal circular de radio a, determinar:
   (a) Potencial magnético escalar $V_m(z)$ en los medios 1, 2 y los campos H_1 y H_2.
   (b) Inductancia L del enrollado.
   (c) Energía magnética acumulada W_m en los medios 1 y 2.

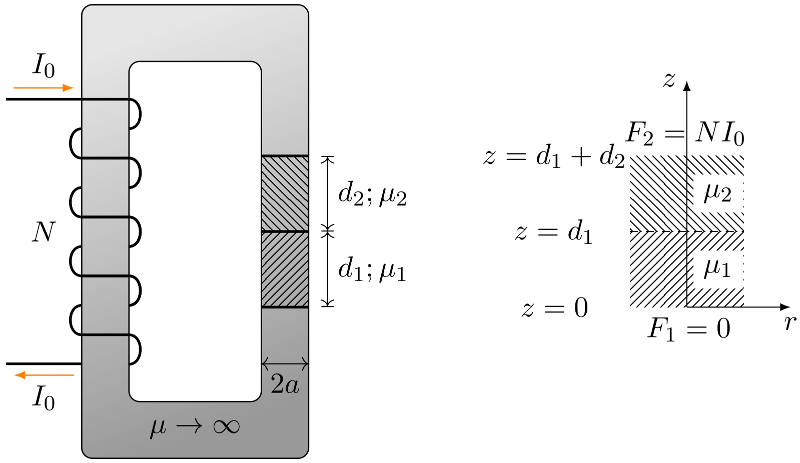

Figura 2: Transformador, pregunta 2.

Solución:

(a) Se busca obtener el potencial magnético escalar V_m, el cual es posible definirlo en condiciones de **flujo magnético nulo** principalmente y en otro tipo de condiciones. Este potencial se deberá obtener para los medios 1 y 2. Observación: No confundir con el potencial vector magnético $\mathbf{A}$, ni el potencial escalar eléctrico V.

Notemos que estamos en presencia de un núcleo ferromagnético (Muy usados en motores) esto implicará una permeabilidad magnética casi infinita ($\mu \to \infty$). Además se tiene la siguiente relación entre la intensidad magnética y μ:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\mathcal{B}}, \qquad \Rightarrow H = \frac{1}{\mu}B. \tag{45}$$

Dada la consideración anterior se tendrá que $H \to 0$, es de importancia considerar que esta relación la podemos realizar dado que no estamos en presencia de un desplazamiento eléctrico variable en el tiempo $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ (ver ecuaciones de Maxwell-Heaviside). Debido a lo anterior, no se tendrá una corriente superficial en el núcleo:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}_f \tag{46}$$

Siendo de esta manera consistente (e independiente del tiempo), se tendrá:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \tag{47}$$

Al ser el rotor de H es cero, se tendrá que el campo magnético es conservativo, esto implica que se podrá definir un potencial magnético escalar V_m tal que:

$$H = -\nabla V_m \tag{48}$$

En base a esto podemos verificar de manera directa que cumple con la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \tag{49}$$

Por lo que aplicando la divergencia al potencial magnético escalar se tendrá que:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{50}$$
$$\nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0, \tag{51}$$
$$\nabla^2 V_m = 0. \tag{52}$$

Con lo que finalmente se logra definir un potencial magnético. Luego podemos analizar el tipo de coordenadas a utilizar, se observa que es de conveniencia el utilizar coordenadas cilíndricas, con lo que:

$$\nabla^2 V_m = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}z^2} \tag{53}$$

Se tendrá que el potencial escalar magnético dependerá de una sola dirección, es decir, $V_m(z)$ por tanto:

$$\nabla^2 V(z) = \frac{\mathrm{d}^2 V_m}{\mathrm{d}z^2} = 0, \tag{54}$$
$$\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}z} = A, \tag{55}$$
$$V_m(z) = Az + B. \tag{56}$$

Se obtiene la forma del campo magnético escalar. Luego tenemos la presencia de dos medios, por lo tanto deberemos hacer la distinción entre cada uno de estos,

$$V_{m1}(z) = Az + B, \tag{57}$$
$$V_{m2}(z) = Cz + D. \tag{58}$$

Con lo que de manera análoga se deberá encontrar 4 ecuaciones tal que permitan despejar estas constantes. Usando las condiciones de borde entregadas.

Medio 1

$$V_{m1}(z = (d_1 + d_2)) = A(d_1 + d_2) + B = NI_0. \tag{59}$$

Medio 2

$$V_{m2}(z = 0) = C \cdot 0 + D = 0. \tag{60}$$

Lo que implicará de manera directa que $D = 0$. Se tendrá además que el campo magnético escalar deberá ser continuo:

$$V_{m1}(z = d_2) = V_{m2}(z = d_2) \tag{61}$$
$$Ad_2 + B = Cd_2. \tag{62}$$

Dado que se busca el obtener otra ecuación, se deriva de lo siguiente:

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla V_{m1} \qquad \mathbf{H}_2 = -\nabla V_{m2} \tag{63}$$
$$H_1 = -\frac{\mathrm{d}V_{m1}}{\mathrm{d}z} \qquad H_2 = -\frac{\mathrm{d}V_{m2}}{\mathrm{d}z} \tag{64}$$
$$= -A \qquad = -C \tag{65}$$

De esta manera tenemos que por condición de borde y dado que el campo tiene solo componente normal en la zona de interés se cumple:

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{66}$$
$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \tag{67}$$
$$\mu_1 A = \mu_2 C \tag{68}$$

Luego se puede plantear 4 set de ecuaciones las cuales serán:

$$NI_0 = A(d_1 + d_2) + B, \qquad D = 0, \qquad \mu_1 A = \mu_2 C, \qquad Ad_2 + B = Cd_2. \tag{69}$$

Luego despejando las variables se obtiene lo siguiente:

$$A = \frac{\mu_2 N I_0}{d_2(\mu_1 + \mu_2)} \tag{70}$$
$$B = (() \frac{NI_0\mu_1}{d_2(\mu_1 + \mu_2)})d_2 - (() \frac{\mu_2 N I_0}{d_2(\mu_1 + \mu_2)})d_1 \tag{71}$$
$$C = \frac{NI_0\mu_1}{d_2(\mu_1 + \mu_2)} \tag{72}$$
$$D = 0 \tag{73}$$

Finalmente despejando las variables, podemos obtener H_1, H_2, V_{m1} y V_{m2}.

(b) Se busca obtener la inductancia L que vendrá caracterizada por la siguiente expresión:

$$L = \frac{\Phi_m N}{I} \tag{74}$$

Donde Φ_m corresponde al flujo magnético y nos da una idea de cuando campo magnético hay en una superficie dada y deberá por tanto, considerar ambos medios:

$$\Phi_{m1} = \int B_1 \, \mathrm{d}a = \mu_1 \int_S H_1 \, \mathrm{d}a = \mu_1 \int_0^{2\pi} \int_0^a A(-\widehat{\mathbf{z}}) \cdot r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(-\widehat{\mathbf{z}}) = \mu_1 \pi a^2 A \tag{75}$$
$$= \mu_1 \pi a^2 \, (() \frac{\mu_2 N I_0}{d_2(\mu_1 + \mu_2)}) \tag{76}$$

De manera análoga tenemos que el flujo para la otra superficie vendrá dado por:

$$\Phi_{m2} = \int B_2 \, \mathrm{d}a = \mu_2 \int_S H_2 \, \mathrm{d}a = \mu_2 \int_0^{2\pi} \int_0^a C(-\widehat{\mathbf{z}}) \cdot r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(-\widehat{\mathbf{z}}) \tag{77}$$
$$= \mu_2 \pi a^2 C = \mu_2 \pi a^2 \, (() \frac{\mu_1 N I_0}{d_2(\mu_1 + \mu_2)}) \tag{78}$$

Una vez obtenido el flujo magnético para ambos medios se logra obtener la inductancia utilizando la expresión:

$$L = \frac{\Phi_m N}{I_0}. \tag{79}$$

Observación: Es importante considerar que es posible tomar cualquier flujo para calcular la inductancia, esto debido a que por condiciones de borde se tendrá que $B_1 = B_2$ y por tanto el utilizar una u otra es análogo.

(c) Debemos obtener la energía magnética acumulada W_m en ambos medios, para esto se utilizará la siguiente expresión:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{80}$$

Luego como se quiere la energía magnética se integra sobre un volumen tal que:

Medio 1

$$W_{m1} = \frac{\mu_1}{2}\int_v H_1^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_1}{2}A^2\int_{d2}^{d1+d2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \frac{\mu_1}{2}A^2\pi a^2 d_1 \tag{81}$$

Medio 2

$$W_{m2} = \frac{\mu_w}{2}\int_v H_2^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_2}{2}C^2\int_0^{d2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r(\mathrm{d}r)(\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \frac{\mu_2}{2}C^2\pi a^2 d_2 \tag{82}$$

Finalmente se obtienen las energías acumuladas en los dos diferentes medios dado que A y C son términos conocidos.

3. Considere un cable coaxial infinitamente largo, portador de una corriente I uniformemente distribuida en el conductor interior y una corriente $-I$ en el conductor exterior (ver figura 3).
   (a) Encuentre el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en todo el espacio.
   (b) Determine el flujo magnético en el dieléctrico (μ_0, ϵ) y la energía acumulada en el campo magnético, por unidad de longitud.

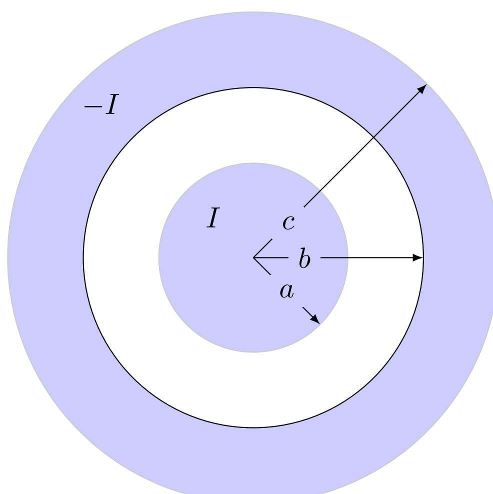

Figura 3: Estructura coaxial de la pregunta 3.

Solución:

(a) Se busca obtener una expresión para la intensidad magnética $\boldsymbol{\mathcal{H}} \to \mathbf{H}$ en todo el espacio. En base a la ley de Ampere se relaciona este con la densidad de corriente de la siguiente manera:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}. \tag{83}$$

Dado que la corriente es homogénea a lo largo de los medios luego podemos definir una densidad de carga superficial interna κ_i y una corriente superficial externa tal que κ_e, tal que:

$$\kappa_i = \frac{I}{\pi a^2}, \qquad \kappa_e = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)}. \tag{84}$$

Luego se evaluará para las diferentes zonas de interés donde se utilizarán coordenadas cilíndricas dada la geometría del problema y dado que la corriente irá en $(\pm\widehat{\mathbf{z}})$, dada la regla de la mano derecha necesariamente $(\pm\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ lo que será útil para definir los diferenciales:

Zona 1:$0 \leq r \leq a$

$$\oint_{\mathcal{C}} H \,\mathrm{d}l = \iint_{\mathcal{S}} J \,\mathrm{d}a \tag{85}$$

$$H(r) \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\theta = \kappa_i \int_0^{2\pi} \int_0^r r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \tag{86}$$

$$H(r) 2\pi r = \kappa_i \pi r^2 \tag{87}$$

$$H(r) = \kappa_i \frac{r}{2} \tag{88}$$

$$\mathbf{H}(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{89}$$

Zona 2: $0 \leq r \leq b$

$$\oint_{\mathcal{C}} H \,\mathrm{d}l = \iint_{\mathcal{S}} J \,\mathrm{d}a \tag{90}$$

$$H(r) \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\theta = I \tag{91}$$

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{92}$$

Zona 3: $0 \leq r \leq c$

$$\oint_{\mathcal{C}} H \,\mathrm{d}l = \iint_{\mathcal{S}} J \,\mathrm{d}a \tag{93}$$

$$H(r) 2\pi r = I + \kappa_e \int_0^{2\pi} \int_b^r r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \tag{94}$$

$$H(r) 2\pi r = I + \kappa_e \pi (r^2 - b^2) \tag{95}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I(r^2 - b^2)}{c^2 - b^2} \tag{96}$$

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{97}$$

Zona 4: $c \leq r$

$$\oint_{\mathcal{C}} H \,\mathrm{d}l = \iint_{\mathcal{S}} J \,\mathrm{d}a \tag{98}$$

$$H(r) 2\pi r = I - I \tag{99}$$

$$H(r) = 0 \tag{100}$$

Finalmente se calcula la intensidad **H** para las diferentes zonas para el cable coaxial.

(b) Se busca obtener el flujo magnético en el dieléctrico que viene caracterizado por (μ_0, ϵ), debemos considerar que el dieléctrico se encuentre en la zona 2, por lo que se tiene que el campo magnético $\mathbf{B}$ dependerá de r tal que $\mathbf{B}(r)$ relacionándose además con el valor obtenido para H en la zona 2 y recordando que $B = \mu H$. Por lo tanto el flujo magnético sobre una superficie vendrá dado por lo siguiente:

$$\Phi_m = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} B \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z (\widehat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^l \int_a^b \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{101}$$

Con lo que finalmente se obtiene el flujo magnético sobre una superficie. Observación: No olvidar que la densidad magnética viene dada por $w_m = \frac{\mu_0 H^2}{2}$ y en este caso lo integraremos sobre el volumen para que sea energía magnética. Luego para obtener la energía magnética en el material en un volumen se tendrá:

$$W_m = \int_v \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\Phi_m \,\mathrm{d}z = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z, \tag{102}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} l 2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\mu_0 I^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi}. \tag{103}$$

Por enunciado debemos obtener la energía por unidad de longitud, por lo que:

$$\frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi} \tag{104}$$

Finalmente se obtiene la energía magnética por unidad de longitud.