Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar Extra
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

Antes de adentrarnos en los temas relacionados al electromagnetismo aplicado, es de suma importancia destacar algunas nociones y operadores matemáticos que serán utilizados a lo largo del curso.

1 Definiciones y operadores matemáticos

- **Campo escalar**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Llamaremos campo escalar sobre Ω a toda función a valores reales $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- **Campo vectorial**: Sea Ω tal que $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\widehat{\mathbf{x}} + F_2(x, y, z)\widehat{\mathbf{y}} + F_3(x, y, z)\widehat{\mathbf{z}} \tag{1}$$

  Donde $F_i(x, y, z)$ con $i = 1, 2, 3$ es un campo escalar sobre Ω.

- **Divergencia**: Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\widehat{\mathbf{x}}+F_2\widehat{\mathbf{y}}+F_3\widehat{\mathbf{z}}$ un campo vectorial de clase C^1. Se fine el operador divergencia $\mathbf{F}$ como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{2}$$

  Donde es posible considerar que:

$$\nabla \equiv \widehat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

  Se debe tener en cuenta que el operador **divergencia** es un operador vectorial que entrega como resultado un valor escalar, de los cuales existen tres escenarios, los cuales se ejemplifican mediante un flujo:

  - $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$: No hay fuentes ni sumideros en el lago; el flujo de agua es estable y no hay expansión ni compresión significativa en ningún punto.
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$: La divergencia es positiva en el punto de la fuente de agua, ya que el agua se está "expandiendo" desde ese punto hacia afuera. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos alejamos de la fuente
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$: La divergencia es negativa en el punto del sumidero, ya que el agua se está "contrayendo" hacia el sumidero. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos acercamos al sumidero.

- **Laplaciano**: Sea f un campo escalar de clase C^2, se define el Laplaciano de f como:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{4}$$

  Es importante considerar que el operador diferencial **Laplaciano** recibe un campo escalar dando como resultado un campo vectorial.

- **Rotor**: Sea $\mathbf{F} = F_1\widehat{\mathbf{x}} + F_2\widehat{\mathbf{y}} + F_3\widehat{\mathbf{z}}$ un campo de clase C^1, se define el operador rotor de $\mathbf{F}$ como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\widehat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\widehat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\widehat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

  Es posible reescribir el rotor tal que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

- **Gradiente**: El gradiente de una función escalar en el espacio tridimensional es un vector que indica la dirección y la magnitud de la tasa de cambio más rápida de la función en un punto dado, esta recibe funciones escalares,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial y}\widehat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F}{\partial z}\widehat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

  - **Preposición 0.1**: Todo campo vectorial de clase C^1 que deriva de un potencial es irrotacional, esto es, si $\mathbf{F} = -\nabla g$ en Ω para algún potencial g de clase C^2 sobre Ω, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en Ω.
  - **Preposición 0.2**: Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 entonces:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \iff \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

    donde hemos usado "cero vector" $\mathbf{0}$ o simplemente 0. Algunas identidades de los operadores vectoriales:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \tag{9}$$
$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{10}$$
$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \tag{11}$$
$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \tag{12}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} \tag{13}$$
$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \tag{14}$$

2 Ejercicios

1. Verifique si los siguientes campos vectoriales son conservativos:
   (a) $\mathbf{E} = \left[y^2\cos(x) + z^3\right]\widehat{\mathbf{x}} + \left[2y\sin(x) - 4\right]\widehat{\mathbf{y}} + \left[3xz^2 + 2z\right]\widehat{\mathbf{z}}$
   (b) $\mathbf{E} = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{z}}$

Solución:

(a) Para verificar si los campos anteriores son conservativos se buscará expresar el campo vectorial en función del gradiente de un campo escalar $\mathbf{E} = -\nabla V$, debido a que al ser expresado de esta manera es posible demostrar que son conservativos, por lo tanto se busca obtener el campo escalar g, tal que lo imponemos como:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3, \tag{15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2y \sin(x) - 4, \tag{16}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 3xz^2 + 2z. \tag{17}$$

Luego denotamos como V^* el campo que queremos buscar e imponer, por tanto:

$$\frac{\partial V^*}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3, \tag{18}$$

$$\int \frac{\partial V^*}{\partial x} \, \mathrm{d}x = \int y^2 \cos(x) \, \mathrm{d}x + \int z^3 \, \mathrm{d}x + C(y, z). \tag{19}$$

Es importante añadir una constante que sea función del resto de coordenadas $C(y, z)$ dado que a priori no sabemos de qué dependerá esta última al realizar la integración.

$$V^*(x, y, z) = y^2 \int \cos(x) \, \mathrm{d}x + z^3 \int \mathrm{d}x + C(y, z), \tag{20}$$

$$= y^2 sen(x) + z^3 x + C(y, z). \tag{21}$$

Luego utilizamos esta candidato V^* para la siguiente componente, es decir, y.

$$\frac{\partial V^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 sen(x) + z^3 x + C(y, z) \right) = 2y \sin(x) + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z). \tag{22}$$

Luego se impondrá que $\frac{\partial V*}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}$ por tanto:

$$\frac{\partial V*}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{23}$$

$$2y \sin(x) + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = 2y \sin(x) - 4. \tag{24}$$

Tal que para lograr dicha igualdad se debe cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = -4, \tag{25}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) \, \mathrm{d}y = -4 \int \mathrm{d}y, \tag{26}$$

$$C(y, z) = -4y + C(z). \tag{27}$$

Luego volviendo sobre nuestra propuesta:

$$V^*(x, y, z) = y^2 \sin(x) + z^3 x + C(y, z), \tag{28}$$

$$= y^2 \sin(x) + z^3 x - 4y + C(z). \tag{29}$$

Vemos que ahora se desarrollo la dependencia de y asociado a la constante $C(y,z)$, por lo que nos queda ver su dependencia con respecto a z. Análogamente:

$$\frac{\partial V^*(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(y^2\sin(x) + z^3x - 4y + C(z)\Big) = 3z^2x + \frac{\partial}{\partial z}C(z). \tag{30}$$

Por lo que posteriormente se tendrá que:

$$\frac{\partial V^*(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}, \tag{31}$$
$$3z^2x + \frac{\partial}{\partial z}C(z) = 3xz^2 + 2z. \tag{32}$$

Por lo que se deberá cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial z}C(z) = 2z, \tag{33}$$
$$\int \frac{\partial}{\partial z}C(z)\,\mathrm{d}z = 2, \int z\,\mathrm{d}z, \tag{34}$$
$$C(z) = z^2 + c. \tag{35}$$

Notar que la constante c, ya no depende de alguna variable con lo que finalmente se define un campo escalar tal que:

$$V^*(x,y,z) = y^2\sin(x) + z^3x - 4y + C(z), \tag{36}$$
$$= y^2\sin(x) + z^3x - 4y + z^2 + c. \tag{37}$$

El cual cumple con con la expresión $\mathbf{E} = -\nabla V^*$, lo que permite afirmar que el campo $\mathbf{E}$ es conservativo.

(b) De manera Similar a lo visto anteriormente se busca el demostrar que el campo vectorial $\mathbf{g}$ es conservativo, pero con la excepción de que estamos en presencia de coordenadas cilíndricas, por lo tanto debemos tener en consideración el gradiente en dichas coordenadas.

$$\mathbf{E} = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{z}} \tag{38}$$

Donde el gradiente para coordenadas cilíndricas vendrá dado por:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\widehat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi}\widehat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\widehat{\mathbf{z}} \tag{39}$$

Se buscará por tanto encontrar un campo escalar tal que permita obtener G a partir del gradiente de dicho campo:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}, \tag{40}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{41}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}. \tag{42}$$

Luego se propone un campo escalar tal que:

$$\frac{\partial V^*}{\partial r}(r,\phi,z) = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}, \tag{43}$$

$$V^*(r,\phi,z) = z\int \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}r + C(\phi,z), \tag{44}$$

$$= z\int \frac{r}{(u)^{3/2}}\frac{du}{2r} + C(\phi,z), \tag{45}$$

$$= \frac{z}{2}\left(\frac{-2}{\sqrt{u}}\right) + C(\phi,z), \tag{46}$$

$$= \frac{-z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C(\phi,z). \tag{47}$$

Luego (anteriormente consideramos un cambio de coordenadas $u = r^2+z^2$):

$$\frac{V^*}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{-z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C(\phi,z)\right) = \frac{\partial}{\partial\phi}C(\phi,z). \tag{48}$$

Imponemos que se cumpla:

$$\frac{\partial V^*}{\partial\phi} = \frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}C(\phi,z) = 0 \tag{50}$$

Es decir, que $C(\phi,z)$ no es dependiente de ϕ por lo tanto:

$$V^* = -\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C(\phi,z) = -\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C(z). \tag{51}$$

Respectivamente sigue que:

$$\frac{\partial V^*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C(z)\right) = \frac{-r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z}. \tag{52}$$

Luego se imponte nuevamente:

$$\frac{\partial V^*}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{53}$$

$$\frac{-r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z}, = \frac{-r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0, \tag{55}$$

$$C(z) = c. \tag{56}$$

Con lo que finalmente se obtiene que la constante tampoco es dependiente de una variable de coordenadas, con lo que finalmente se obtiene:

$$V^*(r,\phi,z) = \frac{-z}{(r^2+z^2)^{1/2}} + C. \tag{57}$$

Lo que nuevamente permite obtener un campo escalar tal que permita escribir el campo variable E como función el gradiente de un campo escalar.

2. Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$, para la geometría esférica (r, θ, ϕ), con $V = V(r)$ dependiente solo de r (simetría esférica). Considere como condiciones de borde que $V(r = a) = v_a$ y $V(r = b) = v_b$.

Solución:

Se busca resolver la ecuación de Laplace teniendo en consideración el tipo de coordenada, además de algunas condiciones de borde. Por tanto el laplaciano en coordenadas esféricas viene dado por:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) \tag{58}$$

Por enunciado se tendrá que V depende solo de una coordenada, es decir $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$, por lo que este se reduce a:

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{59}$$

Luego desarrollando lo anterior,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{61}$$

$$2r\frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r} = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{63}$$

Estamos en presencia de una EDO de segundo grado denominada Couchy-Euler, las cuales se resuelven proponiendo una solución $V(r) = r^\beta$ con $r > 0$ (Lo cual se cumple al tener en cuenta que estamos considerando un radio). Reemplazando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 (r^\beta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial (r^\beta)}{\partial r} = 0 \tag{64}$$

$$\beta(\beta - 1)r^{\beta-2} + 2\beta r^{\beta-2} = 0 \tag{65}$$

$$r^{\beta-2}(\beta^2 - \beta + 2\beta) = 0 \tag{66}$$

$$r^{\beta-2}(\beta^2 + \beta) = 0 \tag{67}$$

Luego se tendrán dos soluciones:

$$\beta(\beta + 1) = 0 \tag{68}$$

$$\beta_1 = 0 \tag{69}$$

$$\beta_2 = -1 \tag{70}$$

Se tendrá que las soluciones son LI, por lo que se plantea una combinación linea de la forma:

$$V(r) = Ar^0 + Br^{-1} \tag{71}$$

$$= A + \frac{B}{r} \tag{72}$$

Utilizando las condición de borde se tendrá:

$$V(r=a) = A + \frac{B}{a} = V_a \tag{73}$$
$$V(r=b) = A + \frac{B}{b} = V_b \tag{74}$$

Con lo que se obtiene lo siguiente despejando B

$$B = aV_a - Aa \qquad\qquad B = bV_b - Ab \tag{75}$$

Despejando las constantes se tendrá:

$$A = \frac{aV_b - bV_a}{(a-b)} \qquad\qquad B = bV_b - \frac{(aV_a - bV_b)b}{(a-b)} \tag{76}$$

Finalmente V vendra expresado:

$$V(r) = A + \frac{B}{r} = \frac{aV_b - bV_a}{(a-b)} + \left(bV_b - \frac{(aV_a - bV_b)b}{(a-b)}\right)\frac{1}{r} \tag{77}$$

3. Una esfera centrada en el origen tiene radio R. Encuentre la densidad de carga volumétrica $\rho(r,\theta,\phi)$ (confinada en $r < R$) y la densidad de carga superficial $\sigma(\theta,\phi)$ (confinada en $r = R$) que juntas producen el campo eléctrico dado a continuación. Exprese la respuesta utilizando funciones trigonométricas:

$$\mathbf{E} = -\frac{2V_0 x}{R^2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{2V_0 y}{R^2}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{V_0}{R}\hat{\boldsymbol{z}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \tag{78}$$

(a) Integre cada componente del campo $\mathbf{E} = -\nabla V$ para encontrar el potencial eléctrico V.

(b) Verifique que V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la esfera. Determine si hay una densidad de carga volumétrica $\rho(r,\theta,\phi)$ en $r < R$.

(c) Use la condición de continuidad del campo eléctrico en la superficie $r = R$ para encontrar la densidad de carga superficial $\sigma(\theta,\phi)$. *Hint:* Asuma que el campo afuera de la esfera es:

$$V_{\text{out}}(r,\theta,\phi) = V_0\frac{R^2}{r^2}\cos\theta + V_0\frac{R^3}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\phi, \quad r \geq R. \tag{79}$$

Solución:

(a) Para obtener el potencial eléctrico V, se integra cada componente del campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla V$. El campo eléctrico dado es:

$$\mathbf{E} = -\frac{2V_0}{R^2}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{2V_0}{R^2}y\,\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{V_0}{R}\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{80}$$

Cada componente del campo eléctrico se puede expresar como derivadas parciales del potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{81}$$

Integrando la componente x del campo eléctrico:

$$\widehat{\mathbf{x}}: \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2V_0}{R^2}x \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_0}{R^2}x^2 + f(y,z). \tag{82}$$

Integrando la componente y:

$$\widehat{\mathbf{y}}: \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2V_0}{R^2}y \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{V_0}{R^2}y^2 + g(x,z). \tag{83}$$

Finalmente, integrando la componente z:

$$\widehat{\mathbf{z}}: \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_0}{R}z + h(x,y). \tag{84}$$

Combinando los resultados de las tres ecuaciones integradas 82, 83 y 84, se obtiene el potencial completo dentro de la esfera:

$$V_{\text{in}}(x,y,z) = \frac{V_0}{R^2}(x^2 - y^2) + \frac{V_0}{R}z + \text{constante}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \tag{85}$$

(b) Ahora se verifica que V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la esfera. Para ello, se calcula el laplaciano en coordenadas cartesianas.

El laplaciano de V en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{86}$$

Primero se derivan las segundas derivadas parciales de V_{in}:

- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, derivando dos veces la expresión $\frac{V_0}{R^2}x^2$, se obtiene $\frac{2V_0}{R^2}$.
- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, derivando dos veces $-\frac{V_0}{R^2}y^2$, se obtiene $-\frac{2V_0}{R^2}$.
- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, derivando dos veces $\frac{V_0}{R}z$, se obtiene 0.

Sumando estas contribuciones, se obtiene:

$$\nabla^2 V_{\text{in}} = \frac{2V_0}{R^2} - \frac{2V_0}{R^2} = 0. \tag{87}$$

Esto confirma que el potencial V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$. Dado que $\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$, se concluye que no hay carga volumétrica dentro de la esfera:

$$\rho(r,\theta,\phi) = 0, \quad r < R. \tag{88}$$

(c) Para encontrar la densidad superficial de carga $\sigma(\theta, \phi)$, se utiliza la condición de continuidad del campo eléctrico en la superficie $r = R$. El potencial dentro de la esfera ya ha sido calculado (reemplazan cambio de variables esférico $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\cos\phi, z = r\cos\theta$)

$$V_{\text{in}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{r}{R}\cos\theta + V_0 \frac{r^2}{R^2}\sin^2\theta\cos 2\phi, \quad r \leq R. \tag{89}$$

El potencial fuera de la esfera se asume que toma la forma:

$$V_{\text{out}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{R^2}{r^2}\cos\theta + V_0 \frac{R^3}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\phi, \quad r \geq R. \tag{90}$$

Para encontrar la densidad superficial de carga, se usa la diferencia entre las derivadas radiales del potencial en $r = R$:

$$\sigma(\theta, \phi) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} \right)_{r=R}. \tag{91}$$

Calculando las derivadas radiales:

- Para V_{in}:

$$\frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} = \frac{V_0}{R}\cos\theta + 2\frac{V_0 r}{R^2}\sin^2\theta\cos 2\phi. \tag{92}$$

- Para V_{out}:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \frac{R^2}{r^2}\cos\theta + V_0 \frac{R^3}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\phi \right) && (93)\\
&= V_0\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R^2}{r^2}\right) + V_0\sin^2\theta\cos 2\phi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R^3}{r^3}\right) && (94)\\
&= V_0\cos\theta\left(-\frac{2R^2}{r^3}\right) + V_0\sin^2\theta\cos 2\phi\left(-\frac{3R^3}{r^4}\right) && (95)\\
&= -\frac{2V_0 R^2\cos\theta}{r^3} - \frac{3V_0 R^3\sin^2\theta\cos 2\phi}{r^4}. && (96)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión para $\sigma(\theta, \phi)$, se obtiene la densidad superficial de carga:

$$\sigma(\theta, \phi) = \varepsilon_0 \frac{V_0}{R}(3\cos\theta + 5\sin^2\theta\cos 2\phi). \tag{97}$$