Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 1

Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez

Antes de adentrarnos en los temas relacionados al electromagnetismo aplicado, es de suma importancia destacar algunas nociones y operadores matemáticos que serán utilizados a lo largo del curso.

1 Definiciones y operadores matemáticos

- **Campo escalar**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Llamaremos campo escalar sobre Ω a toda función a valores reales $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- **Campo vectorial**: Sea Ω tal que $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\widehat{\mathbf{x}} + F_2(x, y, z)\widehat{\mathbf{y}} + F_3(x, y, z)\widehat{\mathbf{z}} \tag{1}$$

  Donde $F_i(x, y, z)$ con $i = 1, 2, 3$ es un campo escalar sobre Ω.

- **Divergencia**: Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\widehat{\mathbf{x}} + F_2\widehat{\mathbf{y}} + F_3\widehat{\mathbf{z}}$ un campo vectorial de clase C^1. Se fine el operador divergencia $\mathbf{F}$ como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{2}$$

  Donde es posible considerar que:

$$\nabla \equiv \widehat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \widehat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

  Se debe tener en cuenta que el operador **divergencia** es un operador vectorial que entrega como resultado un valor escalar, de los cuales existen tres escenarios, los cuales se ejemplifican mediante un flujo:

  - $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$: No hay fuentes ni sumideros en el lago; el flujo de agua es estable y no hay expansión ni compresión significativa en ningún punto.
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$: La divergencia es positiva en el punto de la fuente de agua, ya que el agua se está "expandiendo" desde ese punto hacia afuera. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos alejamos de la fuente
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$: La divergencia es negativa en el punto del sumidero, ya que el agua se está "contrayendo" hacia el sumidero. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos acercamos al sumidero.

- **Laplaciano**: Sea f un campo escalar de clase C^2, se define el Laplaciano de f como:

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 F_1\widehat{\mathbf{x}} + \nabla^2 F_2\widehat{\mathbf{y}} + \nabla^2 F_3\widehat{\mathbf{z}} \tag{4}$$

  Es importante considerar que el operador diferencial **Laplaciano** recibe un campo escalar dando como resultado un campo vectorial.

- **Rotor**: Sea $\mathbf{F} = F_1\widehat{\mathbf{x}} + F_2\widehat{\mathbf{y}} + F_3\widehat{\mathbf{z}}$ un campo de clase C^1, se define el operador rotor de $\mathbf{F}$ como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\widehat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\widehat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\widehat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

  Es posible reescribir el rotor tal que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

- **Gradiente**: El gradiente de una función escalar en el espacio tridimensional es un vector que indica la dirección y la magnitud de la tasa de cambio más rápida de la función en un punto dado, esta recibe funciones escalares,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial y}\widehat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F}{\partial z}\widehat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

  - **Preposición 0.1**: Todo campo vectorial de clase C^1 que deriva de un potencial es irrotacional, esto es, si $\mathbf{F} = -\nabla g$ en Ω para algún potencial g de clase C^2 sobre Ω, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en Ω.
  - **Preposición 0.2**: Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 entonces:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \iff \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

    donde hemos usado "cero vector" $\mathbf{0}$ o simplemente 0. Algunas identidades de los operadores vectoriales:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \tag{9}$$
$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{10}$$
$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \tag{11}$$
$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \tag{12}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} \tag{13}$$
$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \tag{14}$$

2 Teoremas

- **Teorema del rotor de Strokes**: Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto $\mathbb{U}$ que incluye una superficie $\mathcal{S}$ y su borde $\mathcal{C}$. Sea finalmente $\widehat{\mathbf{n}} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre $\mathcal{S}$ y supongamos que la curva cerrada $\mathcal{C}$ es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal $\widehat{\mathbf{n}}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{n}})\, \mathrm{d}a. \tag{15}$$

- **Teorema de la divergencia de Gauss**: Sea $\mathcal{V}$ una región sólida acotada por una superficie cerrada $\mathcal{S}$, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en $\mathcal{V}$. Entonces:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

3 Ejercicios

1. Verifique si los siguientes campos vectoriales son conservativos:
   (a) $\mathbf{V} = \left[y^2 \cos(x) + z^3\right] \widehat{\mathbf{x}} + \left[2y \sin(x) - 4\right] \widehat{\mathbf{y}} + (3xz^2 + 2z)\widehat{\mathbf{z}}$,
   (b) $\mathbf{V} = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \widehat{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \widehat{\mathbf{z}}$.

2. Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$, para la geometría esférica (r, θ, ϕ), con $V = V(r)$ dependiente solo de r (simetría esférica). Considere como condiciones de borde que $V(a) = v_a$ y $V(b) = v_b$.

3. Una esfera centrada en el origen tiene radio R. Encuentre la densidad de carga volumétrica $\rho(r, \theta, \phi)$ (confinada en $r < R$) y la densidad de carga superficial $\sigma(\theta, \phi)$ (confinada en $r = R$) que juntas producen el campo eléctrico dado a continuación. Exprese la respuesta utilizando funciones trigonométricas:

$$\mathbf{E} = -\frac{2V_0 x}{R^2} \widehat{\boldsymbol{x}} + \frac{2V_0 y}{R^2} \widehat{\boldsymbol{y}} - \frac{V_0}{R} \widehat{\boldsymbol{z}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \tag{81}$$

   (a) Integre cada componente del campo $\mathbf{E} = -\nabla V$ para encontrar el potencial eléctrico V.
   (b) Verifique que V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la esfera. Determine si hay una densidad de carga volumétrica $\rho(r, \theta, \phi)$ en $r < R$.
   (c) Use la condición de continuidad del campo eléctrico en la superficie $r = R$ para encontrar la densidad de carga superficial $\sigma(\theta, \phi)$. *Hint:* Asuma que el campo afuera de la esfera es:

$$V_{\text{out}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos\theta + V_0 \frac{R^3}{r^3} \sin^2\theta \cos 2\phi, \quad r \geq R. \tag{82}$$