**EIC1000 Laboratorio: Potenciando tus habilidades matemáticas**

**Introducción al Álgebra:**

**P1.** Para $A$ finito demuestre que se tiene $|\{f : A \longrightarrow \{0,1\} | f \text{ es sobreyectiva}\}| = 2^{|A|} - 2$.

**P2.** Calcule el cardinal de los siguientes conjuntos

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x+y+z = 10\}$.

b) $\{f\colon \{0,1,\ldots,9\} \to \{0,1\} \mid f(0)+f(j) \text{ es impar}\}$ para $j \in \{0,1,\ldots,9\}$.

**P3.** Sean $A, B, C$ conjuntos infinitos tales que

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, |B| = |C|.$$

Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

**P4.** Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto infinito numerable. Demuestre que el siguiente conjunto también es numerable:

$$\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \longrightarrow A | f \text{ es función}\}.$$

**Introducción al Cálculo:**

**P1.** Se define la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante:

$$s_{n+1} = \ln(\sqrt[3]{3s_n + 1}),\ n \geq 0$$

Con $s_0 > 0$ una constante conocida.

a) Pruebe que $s_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que la sucesión es decreciente.

c) Concluya que la sucesión es convergente y que su límite $L$ satisface la ecuación

$$e^{3L} - 3L - 1 = 0$$

**P2.** Calcule los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n^2\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) - 1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sqrt{n}$

**Indicación:** Podría ser útil recordar las desigualdades que satisface la exponencial.

**P3.** Calcule los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\pi^n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n))$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2-3n}\right)^{3n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n\ln(6)}$

**P4.** Sea $a_n$ una sucesión nula distinta de 0 y $b_n = \dfrac{2}{e^{6a_n} - 1}$. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 3a_n)^{b_n}$$