

Pauta Corrección Simulada y Consolidación

P1. [FI1100] Un tren de largo propio L se mueve con velocidad $c/2$ respecto del suelo en la dirección del eje x . Una pelota es lanzada desde la parte trasera hacia la parte delantera del tren, con una velocidad $c/3$, con respecto al tren, en la misma dirección de su movimiento.

- i) ¿Cuánto tiempo demora la pelota en llegar a la parte delantera del tren y qué distancia recorre en el sistema de referencia del tren?

Solución:

Notemos que en el sistema de referencia del tren, el mismo tren mide L y que respecto a ese mismo sistema la pelota se mueve a velocidad $c/3$.

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow \frac{c}{3} = \frac{L}{t} \\ \Rightarrow t = \frac{3L}{c}$$

(1.5 pts.)

- ii) ¿Cuánto tiempo demora la pelota en llegar a la parte delantera del tren y qué distancia recorre en el sistema de referencia del suelo?

Solución:

Si consideramos S' el sistema de referencia del tren, y S el del suelo, usemos las transformaciones de Lorentz del sistema S' a S (ya que estos datos ya los tenemos en S').

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$$

Luego,

$$v = c/2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-(c^2/4)/c^2}} \\ \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-1/4}} \\ \Rightarrow \gamma = \sqrt{4/3}$$

Así,

$$\Delta x' = L \quad \text{distancia recorrida en } S' \\ \Delta t' = \frac{3L}{c} \quad \text{tiempo medido en } S' \\ \Rightarrow \Delta x = \sqrt{4/3}(L + \frac{c}{2} \cdot \frac{3L}{c}) \\ = \sqrt{4/3}L \cdot \frac{5}{2}$$

Con esto, $\Delta x = L\sqrt{25/3}$ es la distancia recorrida en S (sistema fijo en el suelo). Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}\Delta t &= \sqrt{4/3} \left(\frac{3L}{c} + \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot L \right) \\ &= \sqrt{4/3} \frac{L}{c} \cdot \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Finalmente, $\Delta t = \frac{7}{\sqrt{3}} \frac{L}{c}$ es el tiempo medido en S .
(1.5 pts.)

- iii) ¿Cuánto tiempo demora la pelota en llegar a la parte delantera del tren y qué distancia recorre en el sistema de referencia de la pelota?

Solución:

Si consideramos S'' el sistema de referencia de la pelota, tenemos que hacer la transformación desde S' a S'' . Notemos que acá el signo en las transformaciones es negativo.

$$\begin{aligned}\Delta x'' &= \gamma_2 (\Delta x' - v_2 \Delta t') \\ \Delta t'' &= \gamma_2 (\Delta t' - \frac{v_2}{c^2} \Delta x')\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}v_2 = c/3 &\Rightarrow \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - (c^2/9)/c^2}} \\ &\Rightarrow \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - 1/9}} \\ &\Rightarrow \gamma_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta x'' &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(L - \frac{c}{3} \cdot \frac{3L}{c} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Con esto, $\Delta x = 0$ siempre está en el origen de S'' (sistema de la pelota). Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}\Delta t'' &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3L}{c} - \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot L \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{L}{c} \cdot \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Finalmente, $\Delta t = \frac{2\sqrt{2}L}{c}$ es el tiempo medido en S'' .
(1.5 pts.)

- iv) Muestre que los tiempos en los sistemas de referencia del suelo y del tren no están relacionados por el factor γ . ¿Por qué?

Solución:

Notemos que en la parte ii) $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$. Así, los tiempos no están relacionados directamente por γ , osea no son $\Delta t = \gamma\Delta t'$ debido a que el segundo término $(\frac{v}{c^2}\Delta x')$ no es nulo, ya que se está analizando el movimiento de una partícula que si se desplaza en el sistema S' .

(1.5 pts.)

P2. [MA1101] Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

- i) $0 \in X$,
- ii) $\forall r, t \in X, r + t \in X$.

(Se sabe que tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{Z}$ satisfacen las condiciones anteriores).

Dado el subconjunto X , se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}_X$ como sigue:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R}_X y \iff (x - y) \in X.$$

- a) (3 pts.) Demuestre que, para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ que satisface las condiciones i) y ii), $\mathcal{R}_X$ es una relación refleja y transitiva.

Solución:

Veamos primero que $\mathcal{R}_X$ es refleja. Sea $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $x \mathcal{R}_X x \iff (x - x) \in X \iff 0 \in X$ **(0.75 pts.)**, lo que es verdadero por la condición i). Concluimos que $\mathcal{R}_X$ es refleja **(0.75 pts.)**

Veamos ahora que $\mathcal{R}_X$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \mathcal{R}_X y$ y que $y \mathcal{R}_X z$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in X$ y que $(y - z) \in X$ **(0.5 pts.)**. Tomemos $r = x - y$ y $t = y - z$. Por lo anterior, $r, t \in X$. Luego, por la condición ii), $r + t \in X$ **(0.5 pts.)** Por otro lado,

$$r + t = (x - y) + (y - z) = (x - z)$$

lo que muestra que $(x - z) \in X$. Así, $x \mathcal{R}_X z$. Concluimos que $\mathcal{R}_X$ es transitiva **(0.5 pts.)**

- b) (1 pto.) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es una relación de orden.

Solución:

Usando la parte s), falta demostrar que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es antisimétrica **(0.2 pts.)** Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \mathcal{R}_{\mathbb{N}} y$ y que $y \mathcal{R}_{\mathbb{N}} x$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in \mathbb{N}$ y que $(y - x) \in \mathbb{N}$ **(0.2 pts.)** Si tomamos $r = x - y$, tenemos entonces que $r \in \mathbb{N}$ y que $-r \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $r = 0$, porque 0 es el único número natural cuyo inverso aditivo también es un número natural **(0.2 pts.)** Por lo tanto, tenemos que $r = x - y = 0$. Concluimos que $x = y$ y obtenemos, así que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es antisimétrica **(0.2 pts.)** Finalmente, tenemos que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es una relación de orden **(0.2 pts.)**

- c) (2 pts.) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia. Además, demuestre que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Veamos primero que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia. Por la parte a), falta demostrar que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es simétrica **(0.2 pts.)** Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \mathcal{R}_{\mathbb{Z}} y$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in \mathbb{Z}$. Tomemos $r = x - y$ **(0.2 pts.)** Como $r \in \mathbb{Z}$, tenemos que $-r \in \mathbb{Z}$, porque el inverso aditivo de un número entero también es un número entero **(0.2 pts.)** Vemos que $-r = -(x - y) = y - x \in \mathbb{Z}$, lo que muestra que $y \mathcal{R}_{\mathbb{Z}} x$. Así, $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es simétrica **(0.2 pts.)** Finalmente, tenemos que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia **(0.2 pts.)**

Veamos ahora que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Demostraremos esta igualdad de conjuntos por doble inclusión.

$\subseteq$ Si $q \in [p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}}$, tenemos que $(p - q) \in \mathbb{Z}$. Esto significa que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p - q = n$ **(0.2 pts.)** Por lo tanto, $q = n - p \in \mathbb{Z}$, ya que la resta de dos números enteros también es un número entero **(0.2 pts.)**

$\supseteq$ Si $q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(p - q) \in \mathbb{Z}$, porque la resta de dos número enteros también es un número entero **(0.2 pts.)** Así, $p \mathcal{R}_{\mathbb{Z}} q$, por lo que $q \in [p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}}$ **(0.2 pts.)**

Obtenemos entonces que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} \subseteq \mathbb{Z}$ y que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} \supseteq \mathbb{Z}$, por lo que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$ **(0.2 pts.)**

Indicación: Recuerde que puede usar las partes anteriores incluso si no las ha resuelto.