

P21 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x R_x y \Leftrightarrow (x-y) \in X$

a) P.D.Q: Es reflexiva y transitiva

Reflexiva: $x R_x x \Leftrightarrow x-x \in X$
 $0 \in X$

$\therefore$ Se concluye que es reflexiva ya que la relación de x con x en R_x tiene un valor determinado por al menos una de las condiciones.

Transitividad: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se cumple transitividad cuando:

$x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z$

$x R_x y \Leftrightarrow \begin{matrix} (x-y) \in X \\ x+y \in X \\ 2x \in X \end{matrix} \wedge y R_x z \Leftrightarrow \begin{matrix} (y-z) \in X \\ y+z \in X \\ y-2z \in X \end{matrix}$

Entonces: $2x \in X \wedge -2z \in X$ se relacionan con R_x :

$(2x-2z) \in X$ y como $x+z \in X$ entonces

$(x-z) \in X$ y por lo tanto $x R_x z$.

b) P.D.Q: $R_{\mathbb{N}}$ es de orden.

Para demostrar que una relación es de orden hay que demostrar que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Reflexiva: Sea x arbitrario en $\mathbb{N}$:

$x R_{\mathbb{N}} x \Leftrightarrow x-x = 0 \in \mathbb{N}$ y como $0 \in \mathbb{N}$
 $\therefore$ se cumple que sea reflexiva.

Antisimétrica: Si $x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x \Rightarrow x = y$

$x R_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{N}$
 $y R_{\mathbb{N}} x \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{N}$
 $x-y \in \mathbb{N} \wedge y-x \in \mathbb{N}$
 $\therefore$ para que se cumpla $x=y=0$.

Geometría: Sean x, y, z arbitrarias, si
 $x \mathbb{R}_{\mathbb{N}} y \wedge y \mathbb{R}_{\mathbb{N}} z \Rightarrow x \mathbb{R}_{\mathbb{N}} z$

Entonces $x \mathbb{R}_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$

Pero es el mismo procedimiento aplicado en
(a) $\therefore$ Es geometría por la misma justificación.

c) Para demostrar que $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de
equivalencia solo basta demostrar que $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$
es simétrica.

Simétrica: $x \mathbb{R} y \wedge y \mathbb{R} x \Rightarrow x = y$

Entonces si: $x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} y \wedge y \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} x \Rightarrow x = y$
entonces:

$$x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z} \wedge y \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} x \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$
$$x - y \in \mathbb{Z} \wedge y - x \in \mathbb{Z}$$

Como esto se cumple, la única conclusión para ello
es de que x sea igual a y .

•) $[p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}$

Si $p \in \mathbb{Z}$ entonces $p \in [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}}$ y como p pertenece
a la clase de equivalencia de $[p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}}$ entonces
 $p \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} p$ y como es de equivalencia y por con-
secuencia (reflexiva), se cumple para todos los $\mathbb{Z}$.
Siendo de orden parcial, ya que no abarca a
todos los $\mathbb{R}$.

P2

a) •) Refleja: La relación R_x es refleja $\forall x \in X$, tal
 $x R_x x \Leftrightarrow x R_x x$

$$\begin{aligned} x R_x x &\Leftrightarrow (x-x) \in X \\ &\Leftrightarrow 0 \in X \quad / \text{ por (i)} \\ &\Leftrightarrow x R_x x \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}$ esto satisface por i) que $0 \in X$
 $\therefore$ la relación R_x es refleja.

•) Transitiva: La relación R_x es transitiva $\forall x, y, z \in X$ tal
 se cumple $x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z$
 - Tomamos a tomar la hipótesis $x R_x y \wedge y R_x z$ como
 verdadera
 $x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow (x-y) \in X \wedge (y-z) \in X$

$$\text{Ahora sumamos } x-y + y-z = x-z \Rightarrow (x-z) \in X$$

De concluye que R_x es transitiva.

b) •) Como demostramos anteriormente, la R_x es refleja
 y transitiva $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego R_m también lo
 es. Ahora nos quedaba demostrar si R_x
 es antisimétrica.

•) Antisimétrica: R_x es una relación antisimétrica tal
 $\forall x, y \in X$, se cumple que $x R_x y \wedge y R_x x \Rightarrow x = y$
 Tomamos la hipótesis como verdadera.
 $x R_x y \wedge y R_x x \Rightarrow (x-y) \in X \wedge (y-x) \in X$, pero
 que $(x-y) \in X \wedge (y-x) \in X$ al mismo tiempo, tienen que
 cumplir con cualquiera de las dos condiciones,
 $\therefore$ tal cumplen con la condición $0 \in X$, entonces ambos
 tienen que ser iguales, esea, $x = y$ para que den 0
 y por ende pertenecen a X .

$$\begin{aligned} \therefore x R_x y \wedge y R_x x &\Rightarrow (x-y) \in X \wedge (y-x) \in X \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Entonces se puede concluir que es antisimétrica y $\therefore$
 $R_x = R_m$ es una relación de orden.

c) R_z es la relación R_x para los enteros. Como demostramos en a), la R_x es reflexiva y transitiva, R_z entonces sería reflexiva y transitiva. Ahora solo nos quedaría demostrar la simetría.

$$\text{PD.Q: } \forall x, y \in X, x R_x y \Rightarrow y R_x x$$

$$\begin{aligned} x R_x y &\Rightarrow (x - y) \in X \quad / \text{ Si } x = y \\ &\Rightarrow (y - x) \in X \\ &\Rightarrow y R_x x \end{aligned}$$

$\therefore R_x = R_z$ es transitiva y además es una relación de equivalencia.

Ahora demostraremos $[p]_{R_z} = \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}$.

Por definición de clase de equivalencia tenemos que $[p]_{R_z} = \{ p \in \mathbb{Z} / x R_z p \}$, como que p pertenece a los enteros, tiene que cumplir con la relación en R_x .

$$\begin{aligned} [p]_{R_z} &\Rightarrow p R_x x \Rightarrow (p - x) \in X \\ &\Rightarrow p - x = x \\ &\Rightarrow p = x \end{aligned}$$

Como $p = x$ y x cumple con la relación y a la vez pertenece a $\mathbb{Z}$, por transitividad, p también ha de pertenecer a $\mathbb{Z}$.

$$\therefore [p]_{R_z} = \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}.$$

P27 a) P.D.Q: R_x es reflexiva y transitiva

• Reflexiva, $\forall x \in X$, mostrar que $x - x = 0 \in X$ / por i)
 $\therefore x R_x x$ se cumple y es reflexiva.

• Transitiva, $\forall x, y, z \in X$. P.D.Q: $x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z$
 De tiene
 $x R_x y \wedge y R_x z$

$$\Leftrightarrow (x - y) \in X \wedge (y - z) \in X$$

Por ii) sabemos que si $r, t \in X$, $r + t \in X$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x - y) + (y - z) &\in X \\ \Rightarrow x - y + y - z &\in X \\ \Rightarrow x - z &\in X \Rightarrow x R_x z \end{aligned}$$

b) P.D.Q: $R_{\mathbb{N}}$ es relación de orden.

Por a) ya se demostró que es reflexiva y transitiva.

P.D.Q: $R_{\mathbb{N}}$ es antisimétrica: $x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x \Rightarrow x = y$

$$\begin{aligned} \text{De tiene } x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x &\Rightarrow (x - y) \in \mathbb{N} \wedge (y - x) \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow x - y \geq 0 \wedge y - x \geq 0 \\ &\Rightarrow x \geq y \wedge y \geq x \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

$\therefore R_{\mathbb{N}}$ es relación de orden.

c) P.D.Q: $R_{\mathbb{Z}}$ es relación de equivalencia

Por a) ya se demostró que es reflexiva y transitiva.

P.D.Q: $R_{\mathbb{Z}}$ es simétrica: $x R_{\mathbb{Z}} y \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$

$$\begin{aligned} x R_{\mathbb{Z}} y &\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow y + (-x) \in \mathbb{Z} \text{ / por ii) } y - x \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x \end{aligned}$$

$\therefore R_{\mathbb{Z}}$ es relación de equivalencia.

• P.D.Q.: $[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}$

De hecho con todos los elementos de $\mathbb{Z}$ que se relacionan con p tal que

$$x R_{\mathbb{Z}} p \Rightarrow x - p \in \mathbb{Z}$$

y esto solo ocurre en la que $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow [p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$$

P27 a) R_x es reflexiva $\forall x \in X, x R_x x$

En efecto $x R_x x \Leftrightarrow (x-x) \in X$
 $\Rightarrow 0 \in X \Rightarrow$ no cumple i)

$\therefore$ Es reflexa

R_x es transitiva: $\forall x, y, z \in X, x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow x R_x y \Leftrightarrow (x-y) \in X \\ y R_x z \Leftrightarrow (y-z) \in X \end{array} \right\} \text{ Sumando } (x-y + y-z) \in X$$

$$\Rightarrow (x-z) \in X \Rightarrow x R_x z$$

$\therefore$ Es transitiva

b) $\forall x, y \in \mathbb{N}, x R_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N}$

• Ya sabemos que es reflexa y transitiva.

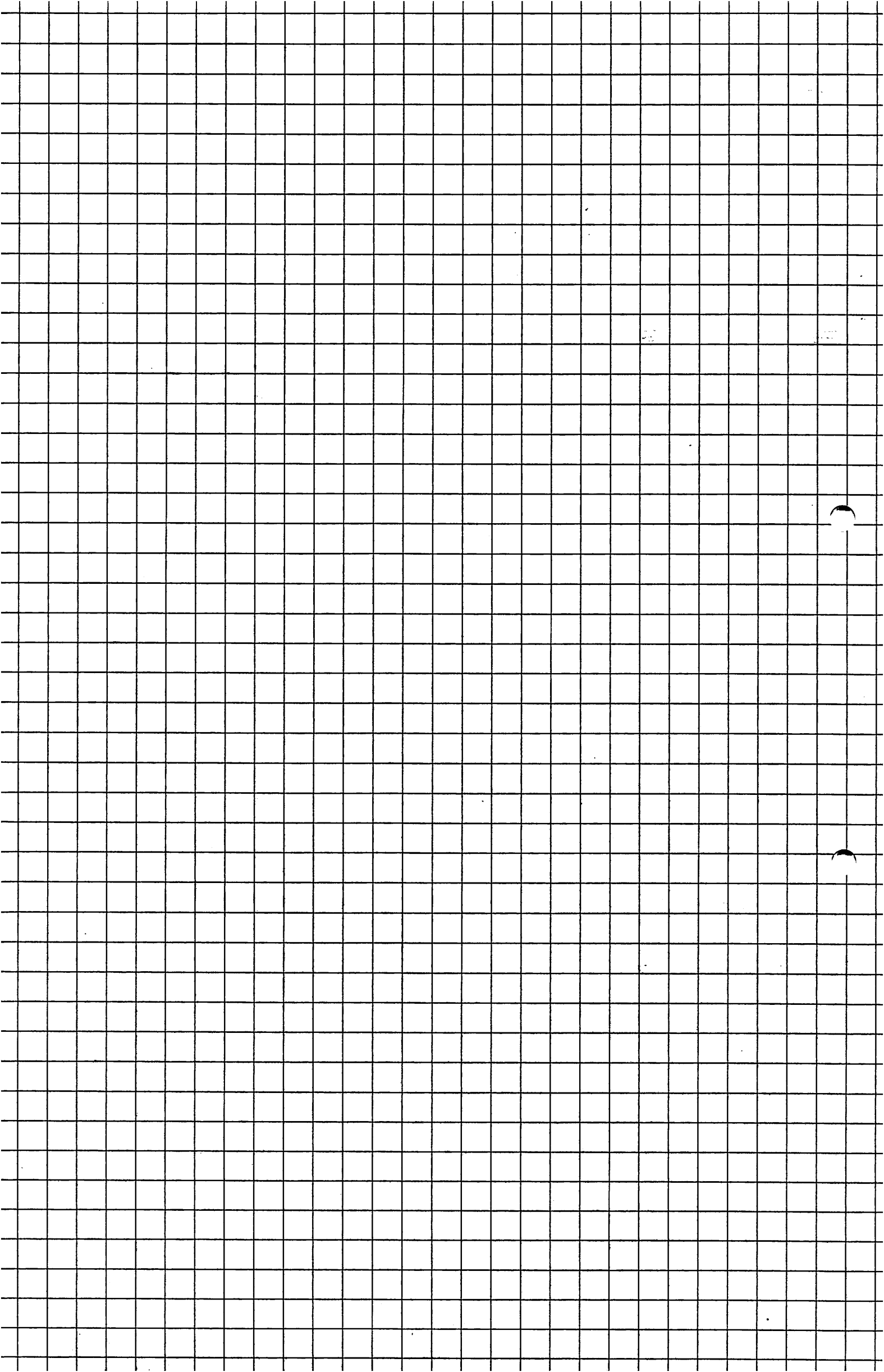
• $R_{\mathbb{N}}$ es antisimétrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}, x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x \Rightarrow x = y$

$$\left. \begin{array}{l} x R_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N} \\ y R_{\mathbb{N}} x \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Si $(x-y) > 0$, $(y-x)$ no pertenece a $\mathbb{N}$

Si $(y-x) > 0$, $(x-y)$ no pertenece a $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow x-y = 0 \text{ o } y-x = 0 \Rightarrow x = y$$



P2/7 a)

• Reflexa: $\forall x \in \mathbb{R}, x R x \Leftrightarrow (x-x) \in X$

Tomando x arbitrario en X , se tiene que $x R x$ dado $(x-x=0) \in X$

• Transitiva: Sean $x, y, r, t \in X$.

P.D.Q.: $x R r \wedge r R t \Rightarrow x R t$

Hipótesis: $x R r \wedge r R t \Leftrightarrow (x-r) \in X \wedge (r-t) \in X$

En efecto, $\exists x-r \in X \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x-r \in \mathbb{R} \Rightarrow x, r \in \mathbb{R}$
 $\wedge \exists r-t \in X \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists r-t \in \mathbb{R} \Rightarrow r, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists (x-t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x-t) \in X \Rightarrow x-t \in X$ dado $x, t \in X \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow x R t$

b) P.D.Q.: $R_{\mathbb{N}}$ es de orden.

$R_{\mathbb{N}}: \forall x, y \in \mathbb{R}, x R_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N}$

• Ya sabemos que es reflexa.

• Transitiva: $x R y \wedge y R t \Rightarrow x R t$

$\Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N} \wedge (y-t) \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow x > y \wedge y > t \Rightarrow x > t \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x R t$ con $x, t \in \mathbb{N}$ arbitrarios.

• $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y \Leftrightarrow R$ es antisimétrica

Sean $x, y \in \mathbb{N}$ arbitrarios

• $x R y \wedge y R x \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{N} \wedge (y-x) \in \mathbb{N}$
 $x > y \wedge y > x, x, y \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow x = y$ (además)

(c) P.D.Q.: $R_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia.

• Ya sabemos que es reflexa y transitiva.

P.D.Q : $x R_{\mathbb{Z}} y \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ *or Introducción*

$$\bullet x R_{\mathbb{Z}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow (y-x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$$

$\therefore R_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia.

Luego, por definición de clase de equivalencia,
 $\forall p \in \mathbb{Z}, [p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

P2

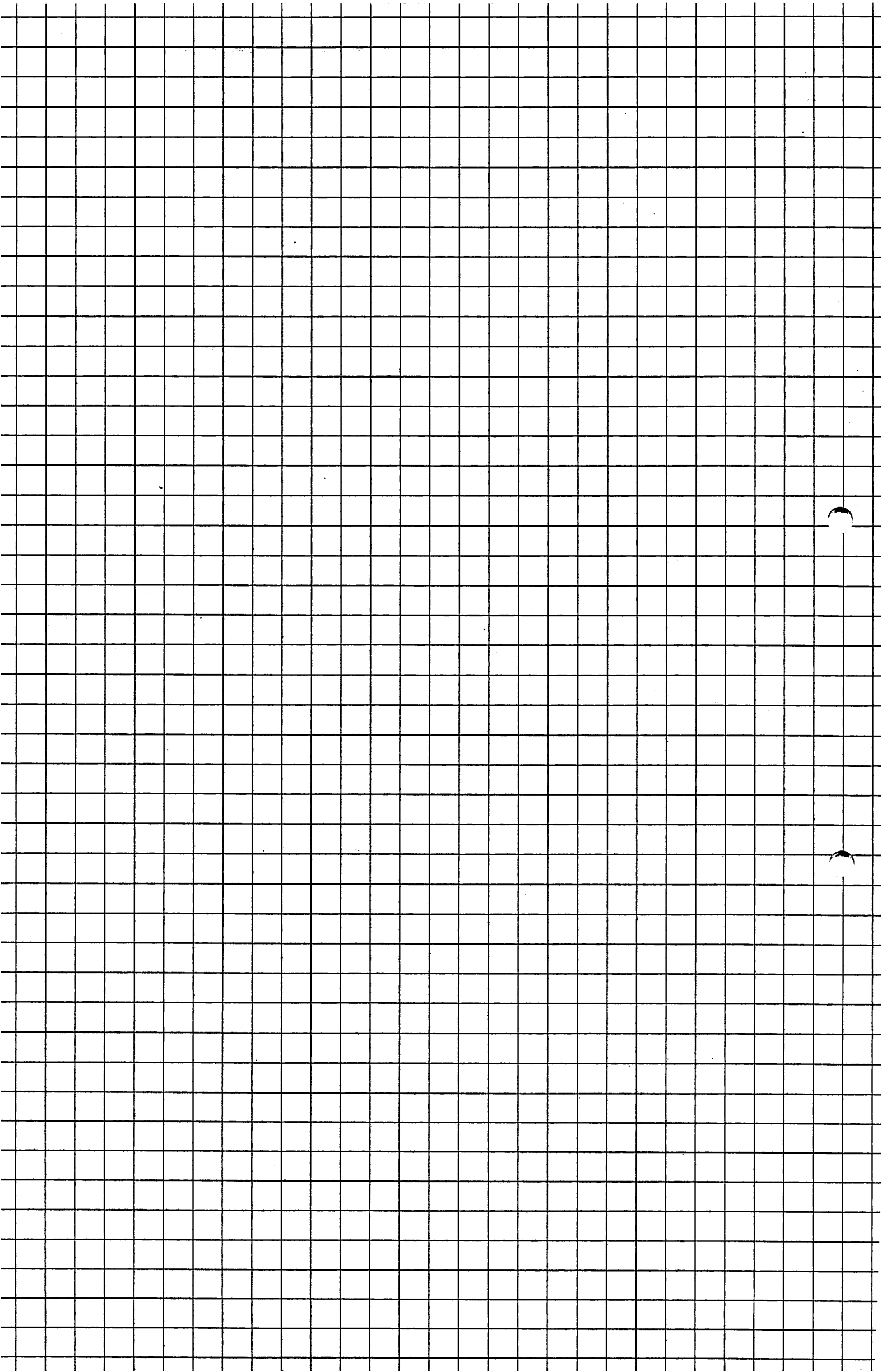
a) Reflexiva: $x R_x x \Leftrightarrow (x-x) \in X$
 $\Leftrightarrow 0 \in X \Leftrightarrow \forall$ por i)

Transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x R_x y \wedge y R_x z \Leftrightarrow x R_x z$
 $\Leftrightarrow (x-y) \wedge (y-z) = (x-z) \in \mathbb{R}_x$

b) R_{IN} relación de orden: ya sabemos que es reflexiva y transitiva. Veamos que es antisimétrica.

Antisimétrica: $x, y \in X, (x R_{\text{IN}} y \Leftrightarrow y R_{\text{IN}} x) = x = y$
 $(x, y) = 0, 0 R_{\text{IN}} 0 \Leftrightarrow 0 R_{\text{IN}} 0 = \underline{\underline{0 = 0}}$

c) R_{E} relación de equivalencia debe ser reflexiva, transitiva y simétrica.



P21 a)

• Reflexo: Sea $x \in X$, tal que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x R x \Leftrightarrow (x-x) \in X$$

Luego $(x-x)=0 \wedge 0 \in X$, por lo tanto,
 R_x es reflexa

• Transitiva: $x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z$

Sea $x, y, z \in X$, como $x \in X \wedge y \in X \Rightarrow x R_x y$,
 luego $y \in X \wedge z \in X \Rightarrow y R_x z$

- Luego, como $x \in X \wedge z \in X$, $x R_x z$
 Entonces, R_x es transitiva.

b) Como ya fue demostrado en a) que es reflexa y transitiva, resta demostrar que además es antisimétrica para que sea de orden.

Antisimetría: $x R_x y \wedge y R_x x \Rightarrow x = y$

Sea $x, y \in X$, ya sabemos que $x R_x y$ por el enunciado de R_x y $y R_x x$. Para que ambas se relacionen $(x-y) = (y-x)$
 $\Rightarrow$ para que cumpla $x = y$, luego
 $(x-y) = 0 \wedge (y-x) = 0$ con $0 \in \mathbb{N}$

por lo tanto, $R_{\mathbb{N}}$ es antisimétrica.

c) Como ya fue demostrado en a) que es reflexa y transitiva, resta demostrar que además es simétrica para que sea de equivalencia, es decir, $x R_x y \Rightarrow y R_x x$.

Pero, para que sea antisimétrica, esto ya se debe cumplir y como ya fue demostrado para que sea de orden en $\mathbb{R}_{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

Por lo tanto, se concluye que $R_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia.

- $[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

Deo $p \in \mathbb{Z}$, por definición, la clase de p , $[p]_{R_{\mathbb{Z}}}$,
 $p \in [p]_{R_{\mathbb{Z}}}$

Como $R_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia, se concluye que si
 $p \in \mathbb{Z}$, entonces $[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

P27 a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tal
que $x = y$

Si $x R_x y \Leftrightarrow (x - y) \in X$, ya que $x = y$

$x R_x x \Leftrightarrow (x - x) \in X$, esto es verdadero ya
que

$(x - x) \Leftrightarrow 0$ y $0 \in X$ por i), $\therefore R_x$ es
reflexiva.

• Transitiva: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, tal que $x + y \in X$
 $y + z \in X$

Si $x R_x y \Leftrightarrow (x - y) \in X$ y $y R_x z \Leftrightarrow (y - z) \in X$

Entonces $(x - y) \in X$, $(y - z) \in X$, y como $x, y, z \in X$,
 $\Rightarrow (x - z) \in X$

$\therefore R_x$ es transitiva

b) Considerando que R_x es reflexiva y transitiva, pero que
 R_{IN} no es de orden, deberá ser antisimétrica.

P.D.Q: R_{IN} es antisimétrica.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x R_{IN} y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{N}$

ya que $\mathbb{N}$ cumple ii), $x, y \in \mathbb{N}$, supongamos que
 $x = 3$ e $y = 2$.

$3 R_{IN} 2 \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{N}$, $(3 - 2) = 1 \in \mathbb{N}$, en cambio

$2 R_{IN} 3 \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$, $(2 - 3) = -1 \notin \mathbb{N}$, por lo
que R_{IN} no es simétrica sino antisimétrica.

$\therefore R_{IN}$ es antisimétrica, siendo una relación de orden.

c) Considerando que R_x es reflexiva y transitiva, pero
que R_z no es de equivalencia deberá ser simétrica.

P.D.Q: R_z es simétrica.

Si tenemos x e $y \in \mathbb{Z}$, entonces

$$x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} y \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Z}, \text{ ya que } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \in (-\mathbb{Z}, +\mathbb{Z}) \text{ e } y \in (-\mathbb{Z}, +\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \pm\mathbb{Z} - \pm\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$$

$\therefore \mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$ es simétrica y de equivalencia.

P247

$$a) \forall x \in X, x R_x x \Leftrightarrow (x-x) \in X \\ \Leftrightarrow 0 \in X$$

$\therefore$ Como $0 \in X$ es nuestra condición i), R_x es reflexiva

$$\forall x, z, y \in X, x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z \\ \Rightarrow (x-y) \in X \wedge (y-z) \in X \\ \Rightarrow (x-y) + (y-z) \in X \\ \Rightarrow x - y + y - z \in X \\ \Rightarrow x - z \in X \Rightarrow x R_x z$$

$\therefore R_x$ es transitiva

b) Como ya demostré que R_x es reflexiva y transitiva, ahora solo me faltó demostrar que es antisimétrica, ya que $\mathbb{N}$ satisface las condiciones i) y ii).

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x \Rightarrow x = y \\ (x-y) \in \mathbb{N} \wedge (y-x) \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$$

Pero que $(x-y) \in \mathbb{N}$ y que $y-x \in \mathbb{N}$, es necesario que $x = y$, ya que ambos restos dan como resultado 0, y este pertenece a los $\mathbb{N}$.

En el caso $x > y$, lo resto $(y-x)$ daría como resultado un negativo, y en el caso $y > x$, lo resto $(x-y)$ daría por resultado un número negativo.

$\Rightarrow$ la única opción es $x = y$

$\therefore$ Como $R_{\mathbb{N}}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, entonces $R_{\mathbb{N}}$ es una relación de orden.

c) Como ya demostré que R_x es reflexiva y transitiva, ahora solo me faltó demostrar que es simétrica, ya que $\mathbb{Z}$ satisface las condiciones i) y ii)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x R_{\mathbb{Z}} y \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$$

$$(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$$

$$(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \neg(y-x) \in \mathbb{Z}$$

Si $x, y \in \mathbb{Z}$ y $(x-y) \text{ también } \in \mathbb{Z}$, entonces $(y-x)$ siempre no $\in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ Como $R_{\mathbb{Z}}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces $R_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia.

$$[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

$$[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x R_{\mathbb{Z}} p\} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (x-p) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x-p) \in \mathbb{Z}$$

Como x y $p \in \mathbb{Z}$, entonces uno menos también $\in \mathbb{Z}$, por ende $(x-p) \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ La $[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$, ya que p se relaciona con x .

P2

a) Reflejo: Sea $X \in \mathbb{R}$ y sea $x \in X$.

$$\begin{aligned} R_x \text{ es reflejo} &\Leftrightarrow x R_x x \Leftrightarrow (x-x) \in X \\ &\Leftrightarrow 0 \in X \\ &\Leftrightarrow \forall, \text{ por i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_x \text{ es transitiva} &\Leftrightarrow (x R_x y \wedge y R_x z \Rightarrow x R_x z) \\ &\Leftrightarrow ((x-y) \in X \wedge (y-z) \in X \Rightarrow (x-z) \in X) \end{aligned}$$

Luego, como $(x-y), (y-z) \in X$, cumplen que

$$\begin{aligned} (x-y) + (y-z) &\in X \\ \Rightarrow x - y + y - z &\in X \Rightarrow (x-z) \in X \\ &\Rightarrow x R_x z \end{aligned}$$

b) P.D.Q: $R_{\mathbb{N}}$ es de orden

Para probar orden debemos probar reflejo, transitiva y antisimétrica, pero como $\mathbb{N}$ satisface las propiedades del conjunto X y ya probamos reflejo y transitiva para R_x , solo queda probar antisimétrica en $R_{\mathbb{N}}$.

• Sea $x, y \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{N}} \text{ es antisimétrica} &\Leftrightarrow (x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} x \Rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow ((x-y) \in \mathbb{N} \wedge (y-x) \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow ((x-y) \geq 0 \wedge (y-x) \geq 0 \Rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow (x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow (x = y \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow \checkmark \end{aligned}$$

c) P.D.Q: $R_{\mathbb{Z}}$ es de equivalencia y que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $[p]_{R_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

Para probar equivalencia debemos probar reflejo, transitiva y simétrica. Por los mismos motivos que en b), solo nos queda probar simétrico.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{Z}} \text{ simétrico} &\Leftrightarrow (x R_{\mathbb{Z}} y \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x) \\ &\Leftrightarrow ((x-y) \in R_{\mathbb{Z}} \Rightarrow (y-x) \in R_{\mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

Notamos que para que $(y-x) \in \mathbb{Z}$ debe cumplir i).
 Como $(x-y) \in \mathbb{Z}$ sigue que
 $(x-y) + (y-x) \in \mathbb{Z}$
 $(x-y + y-x) \in \mathbb{Z}$
 $(0 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 0 \in \mathbb{Z}$ y es verdadera por i)

Como hemos probado que si $(x-y) \in \mathbb{Z}$, entonces $(y-x)$ cumple ii), entonces se concluye que
 $(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y-x) \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} y \Rightarrow y \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} x$

P.D.Q: $\forall p \in \mathbb{Z}, [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$

Sea $x, p \in \mathbb{Z}$ arbitrarios, $x \in [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}} \Leftrightarrow x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} p$
 $\Leftrightarrow (x-p) \in \mathbb{Z}$

Por doble inclusión: $[p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}} \subseteq \mathbb{Z}$ siempre se
 tiene pues $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$ es relación en $\mathbb{Z}$ y todos
 los elementos que se relacionan en $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$
 pertenecen a $\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}}$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0$ con x entera

Caso $x = 0$, en este caso $x \in [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}}$ pues $0 \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} p$
 $\Rightarrow p \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} 0$
 $\Rightarrow p - 0 \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \checkmark$

Caso $x > 0$, en este caso, $x \in [p]_{\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}}$ pues p

No alcanza para $\forall x, p \in \mathbb{Z}, x-p \in \mathbb{Z} \wedge x+p \in \mathbb{Z}$
 lo que dice que
 $\forall x, p \in \mathbb{Z}, (x-p) \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x \mathbb{R}_{\mathbb{Z}} p$