MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 12: Separación de Variables

20 de enero de 2025

P1.

Encuentre la solución $u(x,t)$ de la ecuación

$$u_{tt} + au_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

Donde $0 < a < 1$, con las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

.

Escriba la solución como una serie especificando los coeficientes en términos de f.

P2. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \ \forall x \in (0,L), \ t > 0$$

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ CI para } u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t}$$

a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0, \ \forall x \in (0,L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$

c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s)ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$

e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-a^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.
Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D\sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtinen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la fomra:

$$u_n(x,t) = [A_n\cos(w_nt) + B_n(w_nt)]\sin(a_nx)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$