MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 9: Series de Fourier

14 de enero de 2025

P1. Dada la función $f(x) = x$ calcule:

a) Su serie de Fourier en $[-1, 1]$

b) Su serie de Fourier en $[0, 2]$

c) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$

d) Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

P2. *a*) Calcule la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

b) Deduzca que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

P3. Sea $L > 0$

a) Calcule la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq L \\ \text{-}1, & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

¿A que converge su serie de Fourier cuando $x = 0$? ¿Converge la serie de Fourier a f?

b) Sea $h(x) = c$, $x \in [-L, L]$, $c \in \mathbb{R}$. Calcule su serie de Fourier.

c) Calcule la serie de Fourier de

$$g(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x \leq L \\ 1, & -L \leq x < 0 \end{cases}$$

¿A que converge su serie de Fourier cuando $x = 0$? ¿Converge la serie de Fourier a g?

Resumen

- **Serie de Fourier:** Sea $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ función integrable. Se define la serie de Fourier de f como:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$

  Donde:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\, dx,\; a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)\, dx,\; b_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)\, dx$$

  A las sumas parciales hasta cierto $N > 1$ les decimos polinomio trigonométrico de grado N de f y lo denotamos:

$$S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$

- **Proposición 1:** Si f es de cuadrado integrable, es decir:

$$\int_{-\tau}^{\tau} |f(x)|^2\, dx < \infty$$

  Entonces $S_f^N \to f$ en media cuadrática, es decir, para cada $x \in [-\tau, \tau]$:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} (f(x) - S_f^N(x))^2\, dx = 0$$

- **Teorema de convergencia:** Si f una función continua por trozos en el intervalo $[-\tau, \tau]$ y con derivadas por izquierda y por la derecha en todo punto $(-\tau, \tau)$, con derivada por izquierda en $x = \tau$ y por derecha en $x = -\tau$ entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente para cada $x \in [-\tau, \tau]$. En los extremos de los intervalos se tiene:

$$S_f(\tau) = S_f(-\tau) = \frac{1}{2}[f(\tau) + f(-\tau)]$$

  Y para $x \in (-\tau, \tau)$, $S_f(x) = f(x)$, salvo en los puntos x_0 de discontinuidad de f, en donde:

$$S_f(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right)$$

- **Teorema:** Si f derivable en $[-\tau, \tau]$ y $f(\tau) = f(-\tau)$ entonces $f = S_f$ en $[-\tau, \tau]$. Si además f' es de cuadrado integrable, $S_f^N \to f$ uniformemente.
- **Propiedad:** Si $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ función integrable par, entonces la serie de Fourier de f es:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$

  En cambio, si f es impar:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$