MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 8: Formula de Cauchy y Residuos

14 de enero de 2025

P1. Sea C el circulo centrado en 0 de radio 3, parametrizado en sentido antihorario. Determine las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ *b)* $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh(z^2)}{z(z^2+4)}$

P2. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\sin\theta}$$

P3. Calcule la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

Hint: Considere un semicírculo de radio R suficientemente grande.

P4. Calcule

$$\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$$

donde la curva se recorre en sentido antihorario.

Propuestos

1. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{13 + 12\cos\theta}$$

Resumen

- **[Fórmula de Cauchy]**: Sea f una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega - \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $D(\bar{p}, r) \subseteq \Omega$. Entonces $\forall z_0 \in D(p, r)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D(p,r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

- **[Coeficientes de Taylor]**: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces $\forall z \in D(z_0, r)$ se cumple que, si su derivada n-ésima existe:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

- **[Polos]:** Diremos que z_0 es polo de orden $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ de f si
  - z_0 es singularidad.
  - $m \geq 1$ es el menor tal que:

$$L_m(p) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0$$

  Si $m = 1$ entonces se llama *polo simple*.

- **[Residuo]:** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conjunto abierto, p un punto de Ω y supongamos que $f \in H(\Omega - \{p\})$. Si p es polo de f de orden m, definimos el *residuo* de f en p por:

$$Res(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} f(w) dw$$

  Además, se cumple que:

$$Res(f, p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - p)^m f(z))$$

- **[Función Meromorfa]**: f se dice *meromorfa* en un abierto Ω si existe $P \subseteq \Omega$ finito o numerable tal que:

  $f \in H(\Omega - P)$, f tiene un polo en cada punto de P y P no posee puntos de acumulación.

- **[Teorema de los Residuos]:** Sea f una función meromorfa en Ω abierto, y sea P el conjunto de sus polos. Sea Γ camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P =$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, ..., p_n\}$ y más aún:

$$\oint_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$