

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Pavlito Araya**Auxiliar:** Vicho Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 7: Pre Control 2**

7 de enero de 2025

P1. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos $p^\lambda : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log}(z))$$

- a) Verifique que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p^k(z) = z^k$. Muestre que $\overline{p^\lambda(\bar{z})} = p^{\bar{\lambda}}(z)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.
- b) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z)p^\mu(z)$. Determine el conjunto donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa y pruebe que $(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z)$.
- c) Todo lo anterior justifica que la función p^λ se llame **función potencia generalizada** y que se denote por z^λ , muestre que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ entonces:

$$t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha [\cos(\beta \log(t)) + i \sin(\beta \log(t))]$$

Deduzca que $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ **P2.** Calcule los radios de convergencias de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} n^2(z+2)^{2n}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (8 + (-1)^n)^n z^n$$

P3. Encuentre la serie de potencias centrada en 0 para $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ y para $g(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}$.**P4.** a) Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Dado $\alpha \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^\alpha |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0 \quad (1)$$

entonces se tiene

$$e^{i\alpha} \int_0^\infty f(e^{i\alpha}x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$$

- b) Notando que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface (1) para todo $\alpha \in (0, \pi/4]$ y recordando que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(x^2) dx$$

Indicación: $\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$