MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 6: Funciones Complejas II

7 de enero de 2025

P1. Calcule $\int_\gamma \overline{z} dz$ con

a) $\gamma(t) = t^2 + it$ con $0 \leq t \leq 2$

b) El triangulo con vertices 0 con $3i$ y 4.

P2. Verifique que la siguiente integral, con Γ la semicircunferencia unitaria, es 0

$$\int_\Gamma z^2 dz$$

P3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \sin(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

P4. Demuestre que:

$$\int_0^\infty \frac{ln(x^2+1)}{x^2+1} = \pi ln(2)$$

Indiciación: Para ello puede utilizar sin demostrar que $\int_{SC_R} \frac{Log(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \ln(2) + i\frac{\pi^2}{2}$ donde SC_R es el semicirculo de radio R.

Resumen

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subset \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Además, con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &\quad + i\int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{y}(t) + v(x(t), y(t))\dot{x}(t)]dt \\ &= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$