MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 5: Funciones Complejas

7 de enero de 2025

P1. Encontrar la función holomorfa $f = u + iv$ tal que su parte real $u = x^2 - y^2 + 2x$ y además se tiene que $f(i) = 2i + 1$

P2. Verifique que la función $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x+1+iy}{x+iy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ cumple Cauchy-Riemann para $(x,y) \neq (0,0)$. ¿Es holomorfa?

P3. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

P4. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P5. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = 1$.

Propuestos

P1. Considere la serie de potencias $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ definid por:

$$a_k := \begin{cases} 2i & \text{si k es par} \\ e^{ik\frac{\pi}{2}} & \text{si k es impar} \end{cases}$$

a) Determine su radio de convergencia R.

b) En el caso $z < R$ compruebe que $\sum_{k\geq 0} a_k z^k = \left(\dfrac{2+z+2z^2-z^3}{1-z^4}\right) i$

Indicación: Escriba la serie como suma de dos series geométricas del tipo $\sum a_{2k} z^{2k} + \sum a_{2k+1} z^{2k+1}$

Resumen

1. **Condiciones de Cachy Riemann** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

2. **Teorema:** Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable.

3. **Radio de Convergencia** $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0.
   Obs: El radio puede depender de z_0.

4. **Radio de convergencia**: Si este límite existe también se puede utilizar: $R = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1|}}$.