

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Pavlito Araya

Auxiliar: Vicho Salinas

Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl



Auxiliar 4: Pre Control 1

3 de enero de 2025

P1. Para un valor $a > 0$ dado, se definen las coordenadas elípticas como

$$r(u, v, z) = (a \cosh(u) \cos(v), a \sinh(u) \sin(v), z)$$

Demuestre que estas efectivamente definen un sistema ortogonal de coordenadas y calcule sus factores de escala.

P2. Considere el campo vectorial:

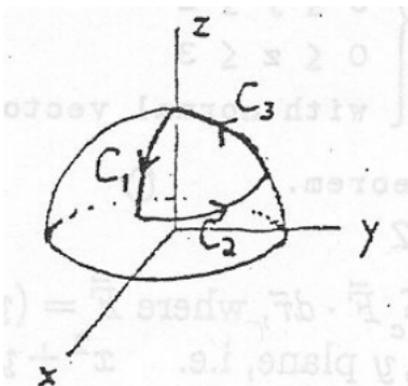
$$\vec{G}(x, y, z) = (e^x z \cos y, -e^x z \sin y, e^x \cos y + 1)$$

- a) Encuentre un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{G} = \nabla \phi$.
- b) Calcule el trabajo realizado por \vec{G} sobre la curva definida por el conjunto:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 - z^2 = 4, 2x + y + z = 2, x, y, z \geq 0\}$$

que comienza en el punto $(1, 0, 0)$ y termina en el punto $(0, 2, 0)$.

P3. Sea C la curva en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dada por tres curvas C_1, C_2 y C_3 como muestra la figura:



La curva C_1 está en el plano xz , la curva C_2 en $z = \sqrt{5}$ y la curva C_3 en el plano yz . Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = 2y\hat{i} + 3x\hat{j} - z^2\hat{k}$ sobre la curva en la dirección indicada en la figura.

P4. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (5x + \cos(1 + y^2 + z^3))\hat{i} + (\ln(1 + x^2 + z^4) - 5y)\hat{j} + (z\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 5)\hat{k}$$

- a) Muestre que \vec{F} es C^1 en todo \mathbb{R}^3 .

b) Usando el teorema de la divergencia, calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$$

donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. *Indicación: Notar que S no es una superficie cerrada, y por lo tanto hay que agregar otras superficies para aplicar el teorema de la divergencia.*

Propuestos

P1. Considere la superficie definida por

$$S = \left\{ (\cos(z) \cos(\theta), \cos(z) \sin(\theta), z) : \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}.$$

a) Calcule el área de S .

b) Escoja una orientación para S y calcule $\int \vec{F} \cdot n \, dS$ para los siguientes campos vectoriales:

1) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$.

2) $F(\rho, \theta, z) = (\rho e^z - z^3 e^{z\theta}) \hat{\rho} - 2e^z \hat{k}$.

P2. Calcule la integral de flujo $\int \int_S F \cdot n \, dS$, donde $F(x, y, z) = (xy, -x^2, x + z)$, S es la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante y n es la normal que apunta hacia arriba.