MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

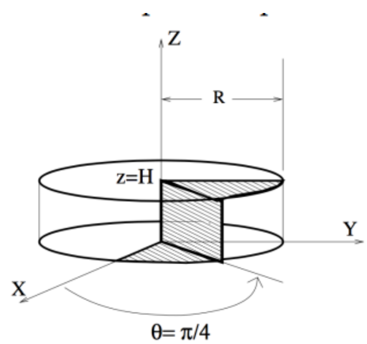
Auxiliar 3: Integrales de Trabajo y Stokes

30 de diciembre de 2024

P1. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

a) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{r}$

b) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.



P2. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x\sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

a) Calcule $\mathrm{rot}(\vec{F})$.

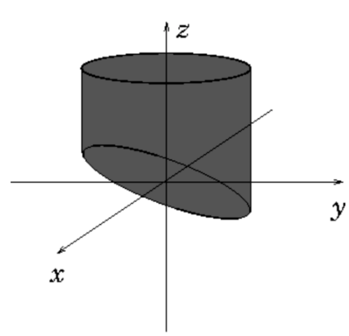
b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), \cos(t)) \qquad t \in [0, 2\pi],$$

y calcule

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción del cilindro de la siguiente figura:



P3. [Aplicación de Stokes]

a) Deduzca el teorema de Green en el plano, para esto considere $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y)\hat{\imath} + F_2(x,y)\hat{\jmath}$ de clase C^1.

b) Demuestre que:

$$Area(S) = \frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy - ydx$$

c) Sea $a > 0$, calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización:

$$x = a\cos^3(t) \qquad y = a\sin^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Propuestos

P1. Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por:

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{d\theta} = 1$$

$$z(0) = h$$

donde z y θ representan las coordenadas en cilíndricas.

a) Bosqueje la curva

b) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$$

Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0

Resumen

Teorema del rotor de Stokes Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la superficie S y su borde ∂S. Sea finalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal ˆ $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Teorema de Green en el plano Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x,y)$ y $N = N(x,y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S, entonces

$$\int_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$