MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 2: Integrales de Flujo y Gauss

27 de diciembre de 2024

P1. Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha \sin\beta \quad y = \sin\alpha \sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ $\beta \in [0, \pi]$.

¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

P2. Evalúe la integral

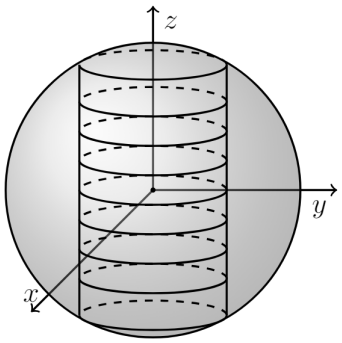
$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$$

en $S\{x^2 + y^2 \leq 4;\ z = 4 + x + y\}$.

P3. Un fluido se somete al campo de velocidades

$$\vec{V}(x, y, z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{z}$$

.



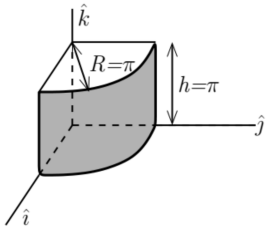
Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Calcule $\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ con $\hat{n}$ normal exterior del cilindro. Primero por definición y luego por Gauss.

P4. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z \sin(y) + xy^2 z \\ e^x \cos(z) + x^2 yz \\ x^2 e^y \end{pmatrix}$$

sobre el manto del cuarto de cilindro de radio y altura π de la figura , orientado hacia el exterior.



Propuestos

P1. Calcule el vector normal para

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\mu \in [-1, 3]$.

P2. Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ definido como el espacio encerrado por las superficies $x = y^2$, $x = 9$, $z = 0$ y $x = z$. Sea $S = \partial W$ ie, la frontera de W.

Use el teorema de Gauss para encontrar el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = (3x - 5y)\hat{\imath} + (4z - 2y)\hat{\jmath} + (8yz)\hat{k}$ en S.

Resumen

- **[Vectores Tangentes]**: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \Big/ \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\| \quad \hat{t}_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v} \Big/ \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|$$

  Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.

- **[Campo de normales]**: Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)}{\left\|\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)\right\|} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)\right\|}$$

- **[Superficie regular orientable]**: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \to \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.

- **[Área]**: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)\right\| dudv$$

- **[Integral de Campo Escalar]**: Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

$$\iint_S f \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)\right) dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Teorema de la Divergencia de Gauss]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$