MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pavlito Araya
Auxiliar: Vicho Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 1: Cálculo Vectorial

23 de diciembre de 2024

P1. *a)* Verifique si los siguientes campos son irrotacionales.

1) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$

2) $\overrightarrow{G}(\rho,\theta,z) = \dfrac{\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} - \dfrac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$

P2. Sea ψ un campo escalar suficientemente diferenciable. Demuestre la siguiente identidad:

a) $div(\psi\nabla\psi) = \|\nabla\psi\|^2 + \psi\Delta\psi$

Indicación: Puede serle útil probar que : $div(f\overrightarrow{F}) = f div\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}\cdot\nabla f$

P3. Se definen las coordenadas parabólicas (ϵ,η,ϕ), tal que $x = \epsilon\eta\cos(\phi)$, $y = \epsilon\eta\sin(\phi)$ y $z = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)$. Calcule el gradiente y el laplaciano en estas coordenadas. ($\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$)

P4. Diremos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3\backslash\{\text{Eje } Z\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \rho > 0$$

Para alguna función $F_\rho : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div\overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho\rho)}{\partial\rho}$$

c) Deduzca que un campo con simetría cilíndrica es solenoidal (tiene divergencia nula) en $\mathbb{R}^3\backslash\{\text{Eje } Z\}$ si y solo si para alguna constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

Propuestos

P1. Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencial de un campo gravitacional:

$$\rho\nabla\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}+\nabla p=-\rho g\hat{k}$$

a) Demuestre la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-\overrightarrow{v}\times(\nabla\times\overrightarrow{v})$$

b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+p+\rho gz=C,\ C\in\mathbb{R}$$

P2. Coordenadas bipolares (σ,τ), con $\sigma\in(0,2\pi)$ y $\tau\in(-\infty,\infty)$.La a es una constante, estas coordenadas cumplen que:

$$x=a\frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau)-\cos(\sigma)}\text{ e }y=a\frac{\sin(\sigma)}{\cosh(\tau)-\cos(\sigma)}$$

a) Pruebe que el gradiente en estas coordenadas es: $\nabla f=\dfrac{(\cosh(\tau)-\cos(\sigma))}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\hat{\sigma}+\frac{\partial f}{\partial\tau}\hat{\tau}\right)$

b) Pruebe que la formula para el laplaciano es: $\Delta f=\dfrac{(\cosh(\tau)-\cos(\sigma))^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)$

Indicación: Pruebe que $h_\sigma=h_\tau=\dfrac{a}{\cosh(\tau)-\cos(\sigma)}$

Resumen

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho,\theta,k)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),k)$ y los factores $h_\rho=1$, $h_\theta=\rho$ y $h_k=1$

Coordenadas Esféricas: $T(r,\phi,\theta)=(r\cos(\theta)\sin(\phi),r\sin(\theta)\sin(\phi),r\cos(\phi))$ y los factores $h_r=1$, $h_\theta=r\sin(\phi)$ y $h_\phi=r$.

$$\nabla f=\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u}+\frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v}+\frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$

$$div(F)=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial(F_uh_vh_w)}{\partial u}+\frac{\partial(F_vh_uh_w)}{\partial v}+\frac{\partial(F_wh_uh_v)}{\partial w}\right)$$

$$rot(F)=\frac{1}{h_uh_vh_w}\begin{vmatrix}h_u\hat{u}&h_v\hat{v}&h_w\hat{w}\\\frac{\partial}{\partial u}&\frac{\partial}{\partial v}&\frac{\partial}{\partial w}\\F_uh_u&F_vh_v&F_wh_w\end{vmatrix}$$

Solenoidal: Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ de clase C^1 se dice solenoidal si $\text{div}(\overrightarrow{F})=0$.
Irrotacional: Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ de clase C^1 se dice irrotacional si $\text{rot}(\overrightarrow{F})=\overrightarrow{0}$.