MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 12: Pre examen (adiuss)!

22 de enero 2025

P1. Control 1 2024 Otoño (P1)

(a) Dado $p \geq 1$, defina $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$N(x) = \|x\|_p + \|x\|_1$$

1) Demuestre que N corresponde a una norma en $\mathbb{R}^n$.
2) Muestre que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto con la norma euclidiana ($\|\cdot\|_2$, con $p = 2$), entonces A es abierto con la norma N.
Ayuda: Para este ejercicio, considere la equivalencia de normas.

(b) Pruebe que, para $\alpha > 2$, el conjunto

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} \leq 2\right\}$$

es cerrado.
Ayuda: Para probar la continuidad de la función $f(x, y) = \dfrac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2}$ en $(x, y) = (0, 0)$, puede demostrar y usar la desigualdad

$$x^4 + y^4 + x^2 > 2|xy^2|.$$

P2. Control 1 2024 verano (P2)

(a) Es posible calcular el siguiente límite?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y),$$

donde

$$f(x, y) = \frac{\|(x, y)\|_\infty}{\|(x, y)\|_2}.$$

Justifique su respuesta.

(b) Sea (x_k) una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|x_k\| \to \|x\|$ en $\mathbb{R}$ y, además, $(x_k, x) \to \|x\|^2$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n$.

(c) Determine los valores de α para los cuales la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - y^2|^\alpha}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es continua en el punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

P3. Control 1 2022 Primavera (P2)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x+y}\right), & \text{si } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es diferenciable en todo punto (x_0, y_0) tal que $x_0 + y_0 = 0$ y que se tiene $f'(x_0, y_0) = (0,0)$. Concluya que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. £Qué puede decir acerca de la continuidad de f?

(b) Estudie las derivadas parciales de f y su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

P4. Ejercicios TCV (de distintos lados jiji)

(a) Use un cambio de variables adecuado para calcular:

$$\iint_D \sqrt{4y^2 - x^2}\, dA,$$

donde D es el triángulo acotado por las rectas dadas por $x = 0$, $x - 2y = 0$, y $x + 2y = 2$.

(b) Determine la masa del cuerpo $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ sabiendo que la densidad puntual de masa está dada por la función

$$\rho(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

usando el cambio de variables:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix},$$

con $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(c) Calcule

$$\iiint_\Omega (y^2 + x + z - 1)\, dV,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se define como:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z\}.$$