

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Javier Ramírez Ganga.**Auxiliar:** Anaís Muñoz P.**Capsula 15: Integracion v4 (TCV).**

22 de enero 2025

P1. Para $a > 0, b > 0$, calcule la siguiente integral:

$$\iint_A \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

Donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.**P2.** Calcule la integral:

$$\iiint_E \frac{z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)} dV$$

Donde E es la región sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.**Resumen**

- **[Teorema de cambio de variables]** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y acotado, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función inyectiva de clase C^1 , y $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $g(A)$. Entonces:

$$\int_{g(A)} f(y) dy = \int_A (f \circ g)(x) |\det g'(x)| dx.$$

- **[Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$]** La parametrización en coordenadas polares se define como:

$$(x, y) = g(r, \theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

donde:

$$x = g_1(r, \theta) = r \cos \theta,$$

$$y = g_2(r, \theta) = r \sin \theta.$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta) := \det g'(r, \theta) = r.$$

- **[Coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$]** La parametrización en coordenadas cilíndricas se define como:

$$(x, y, z) = g(r, \theta, z),$$

donde:

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Las componentes están definidas por:

$$x = g_1(r, \theta, z) = r \cos \theta,$$

$$y = g_2(r, \theta, z) = r \sin \theta,$$

$$z = g_3(r, \theta, z) = z.$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta, z) := \det g'(r, \theta, z) = r.$$

- **[Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$]** La parametrización en coordenadas esféricas se define como:

$$(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi),$$

donde:

$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Las componentes están definidas por:

$$x = g_1(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi,$$

$$y = g_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = g_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi.$$

El Jacobiano está dado por:

$$J(r, \theta, \varphi) := \det g'(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi.$$