pauta mini-guía

TCV

P1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la region solida limitada por el hiperboloide parabolico definido por:

$$z = xy$$

con $z \geq 0$ y por el cilindro:

$$x^2 + y^2 = 9$$

y los planos:

$$x - y = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

Usando coordenadas cilindricas evaluar la integral:

$$\iiint_S \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$$

→ pasando a cilindricas:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$
$$z = z$$

teniamos las desigualdades:

$$0 \leq z \leq xy$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

$$x = y \quad \wedge \quad y = 0$$

Aplicando el cambio, obtenemos

$$0 \leq z \leq r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$0 \leq r \leq 3$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\theta = 0$$

↳ de las desigualdades de θ

$$\theta = \pi/4 \quad \wedge \quad \theta = 0$$

lo cual implica:

$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

⟶ luego, aplicando a la funcion

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2(\cos^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta)}{r}$$

$$= r\,(\cos^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta)$$

⟶ ademas es sabido que:

$$|\det J_T| = r$$

Asi, la nueva integral sera:

$$\iiint_S \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3\int_0^{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} r^2(\cos^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 r^4(\cos^3\theta\operatorname{Sen}\theta - \operatorname{Sen}^3\theta\cos\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 g \, \text{sen}\, g - \text{sen}^3 g \cos g \, dg$$

$$= \frac{3^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{\cos^4 g}{4} - \frac{\text{sen}^4 g}{4} \Big|_0^{\pi/4} \right)$$

$$= \frac{3^5}{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{3^5}{20} \quad //$$

P2. Considere el cono definido por:

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z, z \in [0, 1] \right\}$$

Suponga que su densidad de masa esta dada por la funcion:

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + 3y$$

Calcule la masa total del cono.

Indicacion: La masa total del cono se define como $M = \int\int\int_C \rho(x, y, z)$

tenemos

$$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z$$

$$z \in [0, 1]$$

Aplicando cilindricas:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z = z$$

obtenemos:

$$0 \leq r \leq 1 - z$$

$$z \in [0, 1]$$

Como no hay restriccion para ϑ, tenemos:

$$\vartheta \in [0, 2\pi)$$

aplicando el cambio a la funcion:

$$\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xz + 3y$$

$$\rho = r^2 + r\cos\vartheta\, z + 3r\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

Como ademas se sabe

$$|\det J_T| = r$$

$\longrightarrow$ la integral sera:

$$M = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} r^3 + 2r^2 \cos\vartheta\, z + 3r^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta \, dr\, d\vartheta\, dz$$

$$M = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}(1-z)^4 + \frac{2}{3}(1-z)^2 z\cos\vartheta + (1-z)\,\mathrm{sen}\,\vartheta \, d\vartheta\, dz \right.$$

$$M = \int_0^1 \frac{\pi}{2}(1-z)^4 \, dz$$

$$M = \frac{\pi}{10}$$

//

P3. Hallar el volumen de la region R limitada inferiormente por el cono:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y superiormente por la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

Con $a > 0$ y $z \geq 0$

→ hacemos el cambio:

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$z = \rho \cos\phi$$

es esfericas con

i) $r \geq 0$

ii) $\theta \in [0, 2\pi]$

iii) $\phi \in [0, \pi]$

Ademas, sabemos que:

$$|\det J_T| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

$$\rho^2 = 2a\rho\cos\phi$$

como ademas $\rho \geq 0$

$$\rho = 2a\cos\phi$$

tenemos entonces:

$$0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta$$

ademas

$$0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq z$$

$$0 \leq \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi + \rho^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi} \leq \rho\cos\phi$$

$$0 \leq \rho\,\text{sen}\,\phi \leq \rho\cos\phi$$

de donde tenemos

1. $\text{Sen}\,\phi \leq \cos\phi$

   $\tan\phi \leq 1$

2. $0 \leq \text{Sen}\,\phi$

3. $0 \leq \text{Cos}\,\phi$

Ademas sabemos que

$$\phi \in [0, \pi]$$

por def de coordenadas cilindricas

por lo tanto obtenemos

$$\phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

no se tienen cotas para θ, por lo tanto:

$$\mathrm{Vol}(R) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{16\pi}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$

$$= \pi a^3$$

P4. Hallar el volumen del solido S limitado superiormente por la superficie:

$$\rho = 2a\text{Cos}(\phi)$$

con $a > 0$ e inferiormente por el cono:

$$\phi = \alpha$$

Con $\alpha \in (0, \pi/2]$.Analice particularmente el caso $\alpha = \pi/2$.

→ consideramos

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$z = \rho \cos$$

tenemos directamente las cotas!

$$0 \leq \rho \leq 2a\cos\phi$$

$$0 \leq \phi \leq \alpha$$

y como no hay cotas para θ, se tendra

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Como se sabe que

$$|\det J_T| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

la integral a calcular sera

$$Vol(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$Vol(S) = \frac{4}{3}\pi a(1-\cos^4\alpha)$$

↳ notar que para $\alpha = \pi/2$

Se tendra

$$Vol(S) = \frac{4}{3}\pi a(1-\cos^4(\pi/2))$$

$$\boxed{Vol(S) = \frac{4}{3}\pi a}$$

//

P5. Calcule el volumen del siguiente conjunto:

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x : 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right\}$$

↳ nota ♥

el dia que hice esta pregunta andaba dim, el inicio tá teorico!

utilizando cambio a coordenadas cilindricas

$$r(p, \phi, z) = (p\cos\phi, p\,\mathrm{sen}\,\phi, z) = (x, y, z)$$

Tendremos que

$$A' = \left\{(p, \phi, z) : 1 \leq p^2 \leq 2p\cos\phi, 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{4 - p^2}}\right\}$$

y notamos que la imagen de A' a travez de r coincide con A.

ademas

r es C^1 y biyectiva

Como $f = 1$ es continua por teo de cambio de variable :

$$\text{vol}(A) = \int_A 1 = \int_{A'} 1 \cdot |\det J_r|$$

con J_r el Jacobiano de la Transformacion r.

$\longrightarrow$ Calculamos J_r

$$J_r = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\,\text{sen}\,\phi & 0 \\ \text{sen}\,\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tendremos

$$\det J_r = \rho\cos^2\phi + \rho\,\text{sen}^2\phi$$

$$\det J_r = \rho$$

$\longrightarrow$ Veamos las cotas!

Tenemos

$$1 \leq \rho^2 \leq 2\rho\cos\phi$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq \rho^2 \quad \wedge \quad \rho^2 \leq 2\rho\cos\phi$$

$$\underbrace{\rightarrow \quad 1 \leq \rho \quad \wedge \quad \rho \leq 2\cos\phi}_{1 \leq \rho \leq 2\cos\phi}$$

lo ultimo implica que

$$\frac{1}{2} \leq \cos\phi$$

por lo tanto se debe tener:

$$\phi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

Con lo que nuestras cotas seran:

$$1 \leq \rho \leq 2\cos\phi$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}$$

Teniamos que:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_{A'} \cdot \left| \det j \right|$$

↑ nota: es el valor abs. del determinante!

Remplazando:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\cos\phi} \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}} \rho \cdot dz\, d\rho\, d\phi$$

[prop] resolver la integral

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - 2$$

P6. Calcule las siguientes integrales usando TCV:

(a) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

(b) $\int_P dV$, con $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq R^2\right\}$

a. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}$

el dominio de integracion es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \,,\, y \geq 0\}$$

hacemos transformacion a coordenadas polares:

$$T(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{Sen}\,\theta) = (x,y)$$

donde se tendra

$$|\det(JT(\rho,\theta))| = \rho$$

luego, como

- $x \geq 0 \longrightarrow \rho\cos\theta \geq 0$

  $\cos\theta \geq 0$

$$\theta \in [0, \pi/2] \cup \left[\tfrac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$$

- $y \geq 0 \longrightarrow \rho \operatorname{Sen} \theta \geq 0$

$$\operatorname{Sen} \theta \geq 0$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$\longrightarrow$ intersectando ambos intervalos :

$$\theta \in [0, \pi/2]$$

$\longrightarrow$ por otro lado, no hay mayor restriccion para ρ mas que :

$$\rho \geq 0$$

$\longrightarrow$ Asi, por TCV :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \, d\rho$$

hacemos : $u = \rho^2 \qquad du = 2\rho \, d\rho$

$$\rho = 0 \longrightarrow u = 0$$

$$\rho = \infty \longrightarrow u = \infty$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{4}(0+1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

b. $\int_P dV \quad P = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq R^2\right\}$

el dominio de integracion es

$$P = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq R^2\right\}$$

pasamos a coordenadas esfericas

convenientemente :

$$T(r,\theta,\phi) = (a\cdot r\cdot \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ b\,r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ c\,r\cos(\theta))$$

$$T:\ [0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

[prop] calcular J_T y $|\det(J_T)|$

Se tendra:

$$|\det(J_T)| = abc\, r^2 \operatorname{sen}\phi$$

además

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq R^2 \longrightarrow r \leq R$$

y como, no hay restricciones para ϕ v θ,

el nuevo dominio sera:

$$D = \{(r,\theta,\phi) \in [0,\infty) \times (0,2\pi) \times [0,\pi] : r \leq R\}$$

→ por TCV:

$$\int_P dv = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc\, r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^R \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^R r^2 \left(-\cos(\phi) \Big|_0^\pi \right) dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^R r^2 (1+1)\, dr$$

$$= 4\pi abc \int_0^R r^2\, dr$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc \; r^3 \Big|_0^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc R^3$$

$\square$

Animo