MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Javier Ramírez Ganga.
Auxiliar: Anaís Muñoz P.

Auxiliar 11: Teorema de cambio de variable! (TCV).

20 de enero 2025

P1. Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

junto a la región

$$R:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geq R,\ x^2+y^2\leq R^2\}$$

donde $R>0$. Calcule la integral

$$\int_R f(x,y)\,dA.$$

P2. Considere un cuerpo de masa M definido por la región

$$R:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\leq x^2+y^2\leq 4x\}$$

y considere la función de densidad de masa

$$\rho(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Encuentre la masa M del cuerpo que viene dada por la integral

$$M=\iint_R \rho(x,y)\,dA.$$

P3. Calcular la integral

$$\int_D \left(x^3+xy^2\right)dV,$$

donde $D\subset\mathbb{R}^3$ es la región del primer octante que se encuentra debajo del paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

P4. Considere la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ y la región

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq 0\}.$$

Calcule la siguiente integral:

$$\iint_C f(x,y,z)\,dx\,dy.$$

P5. Sea

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-2x\leq 3y\leq 3-2x,\ x-3\leq 2y\leq x+1\}.$$

Calcule la siguiente integral:

$$\iint_D e^{x+5y}\,dx\,dy.$$

Resumen

- **[Teorema de cambio de variables]** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y acotado, $g : A \to \mathbb{R}^d$ una función inyectiva de clase C^1, y $f : g(A) \to \mathbb{R}$ integrable sobre $g(A)$. Entonces:
$$\int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ g)(x)\left|\det g'(x)\right|\,dx.$$

- **[Coordenadas polares en** $\mathbb{R}^2$**]** La parametrización en coordenadas polares se define como:
$$(x, y) = g(r, \theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$
donde:
$$x = g_1(r, \theta) = r\cos\theta,$$
$$y = g_2(r, \theta) = r\sin\theta.$$
El Jacobiano está dado por:
$$J(r, \theta) := \det g'(r, \theta) = r.$$

- **[Coordenadas cilíndricas en** $\mathbb{R}^3$**]** La parametrización en coordenadas cilíndricas se define como:
$$(x, y, z) = g(r, \theta, z),$$
donde:
$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$
Las componentes están definidas por:
$$x = g_1(r, \theta, z) = r\cos\theta,$$
$$y = g_2(r, \theta, z) = r\sin\theta,$$
$$z = g_3(r, \theta, z) = z.$$
El Jacobiano está dado por:
$$J(r, \theta, z) := \det g'(r, \theta, z) = r.$$

- **[Coordenadas esféricas en** $\mathbb{R}^3$**]** La parametrización en coordenadas esféricas se define como:
$$(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi),$$
donde:
$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi].$$
Las componentes están definidas por:
$$x = g_1(r, \theta, \varphi) = r\cos\theta\sin\varphi,$$
$$y = g_2(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = g_3(r, \theta, \varphi) = r\cos\varphi.$$
El Jacobiano está dado por:
$$J(r, \theta, \varphi) := \det g'(r, \theta, \varphi) = r^2\sin\varphi.$$