pauta guia control 3

PAUTA GUIA CONTROL 3

Animo!

P1. Encuentre los puntos extremos de $f:\mathbb{R}^4/\{(0,0,0,0)\}\mapsto\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y,z,u)=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{u}{z}+\frac{1}{u}$$

Calculamos gradiente de:

$$f(x,y,z,u)=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{u}{z}+\frac{1}{u}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1-\dfrac{y}{x^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{u}{z^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{u^2}$

Remplazando :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 - y/x^2 \\ 1/x - z/y^2 \\ 1/y - u/z^2 \\ 1/z - 1/u^2 \end{pmatrix}$$

imponemos condicion de punto critico

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Se obtiene el sistema :

$$\underbrace{\begin{aligned} 1 - y/x^2 &= 0 \quad /x^2 \\ 1/x - z/y^2 &= 0 \quad /xy^2 \\ 1/y - u/z^2 &= 0 \quad /yz^2 \\ 1/z - 1/u^2 &= 0 \quad /u^2 z \end{aligned}}$$

$$x^2 - y = 0 \longrightarrow x^2 = y \quad (1)$$

$$y^2 - xz = 0 \quad (2)$$

$$z^2 - uy = 0 \quad (3)$$

$$U^2 - z = 0 \longrightarrow U^2 = z \quad (4)$$

Tenemos que resolver el sistema!

$\longrightarrow$ (1) en (2)

$$x(x^3 - z) = 0$$

$$(x^3 - z) = 0$$

$$x^3 = z$$

pero $z = U^2$, luego

$$x^3 = U^2$$

$\longrightarrow$ (4) en (3)

$$U(U^3 - y) = 0$$

$$U^3 - y = 0$$

$$U^3 = y$$

Pero $y = x^2$

$$U^3 = x^2$$

Juntando las 2 expresiones obtenidas:

$$U = X^{3/2}$$

$\longrightarrow$ Remplazando

$$(X^{3/2})^3 = X^2$$

$$X^{6/2} = X^2$$

$$X^3 - X^2 = 0$$

$$X^2(X-1) = 0$$

$$\therefore X = 1.$$

Como $X = 1$, entonces:

$$Y = 1 \, , \quad Z = U = 1$$

Por lo que el punto critico es:

$$\boxed{(1, 1, 1, 1)}$$

pto critico!

→ Analizamos la naturaleza del punto, para ello estudiaremos H.

Calculamos 2da derivada!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2u}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2z}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{2}{u^3}$$

y 2da derivada cruzadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial z} = -\frac{1}{z^2}$$

$\longrightarrow$ hessiana :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2z}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & \frac{2u}{z^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2}{u^3} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ evaluando en $(1,1,1,1)$

$$H(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Analizamos si es minimo o maximo, utilizando metodo menor principal.

$\longrightarrow$ nota

$$H(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Asi (Prop. calcular determinantes)

$$|H_1| = 2 \quad > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|H_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

$\therefore$ Como $|H_i| > 0 \ \forall i$

$\longrightarrow$ $(1,1,1,1)$ es minimo local.

P2. Encuentre los puntos extremos de la siguiente función:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

→ Calculamos gradiente:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix}$$

→ imponemos condicion pto. critico

$$\nabla f(X_0) = 0$$

lo que nos da el sistema:

$$4x^3 - 4x + 4y = 0 \quad (1)$$
$$4y^3 - 4y + 4x = 0 \quad (2)$$

→ Resolvemos el sistema

- (1) + (2)

$$4x^3 + 4y^3 = 0$$

$\hookrightarrow \quad x = -y \quad (3)$

- (3) en (1)

$$4x^3 - 4x - 4x = 0$$

$$x^3 - 2x$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

lo que nos da 2opciones

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Asi, los puntos criticos son:

$$(0,0) \quad , \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

→ Ahora buscamos clasificarlos!
para eso usamos hessiana

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4.$

f es polinomio, asi que es C^∞

Remplazando:

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

→ Evaluamos cada pto critico para clasificarlo:

1. $H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$\det(H(0,0)) = 16 - 16 = 0$$

↳ no basta para concluir!

¿Que hacemos ahora?

una forma de analizar es por inspeccion

↳ Analizamos zonas cercanas al punto critico

Sea $h > 0 \wedge h \approx 0$ (muy pequeño)

- $f(h,h) = h^4 + h^4 - 2h^2 - 2h^2 + 4h^2$

$$= 2h^4 > 0$$

$$\cdot\ f(h,0) = h^4 + 0 - 2h^2 - 0 + 0$$

$$= \underbrace{h^2(h^2-2) < 0}$$

Ya que $h \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ por que sino analizariamos otro pto critico.

Como ambos caminos tienen comportamientos distintos

$\therefore$ $(0,0)$ es punto silla!

2. $H(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$

$$\det(H(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})) = 400 - 16 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0$$

$\therefore$ $(+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $\wedge$ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ son mínimos!

P2. Determine los máximos, mínimos y puntos sillas de:

$$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)} \text{ con } a, b > 0 \text{ constantes.}$$

y $a \neq b$

→ Calculamos gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax e^{-(x^2+y^2)} - 2x(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2by e^{-(x^2+y^2)} - 2y(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

→ factorizando:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-(x^2+y^2)}\left(a-(ax^2+by^2)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{-(x^2+y^2)}\left(b-(ax^2+by^2)\right)$$

imponemos condicion de punto critico

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x e^{-(x^2+y^2)}(a-(ax^2+by^2)) \\ 2y e^{-(x^2+y^2)}(b-(ax^2+by^2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos da el sistema:

$$2x e^{-(x^2+y^2)}(a-(ax^2+by^2))=0$$

$$2y e^{-(x^2+y^2)}(b-(ax^2+by^2))=0$$

Simplificando (ya que $e \neq 0 \wedge 2 \neq 0$)

$$x(a-(ax^2+by^2))=0$$

$$y(b-(ax^2+by^2))=0$$

↳ como no sabemos los valores de a y b, no hay una unica solucion al problema!

¿Que hacemos entonces?

trabajamos por caso!

Caso 1) $y=0 \wedge x=0$

el pto critico es $(0,0)$

Caso 2) $x = 0 \wedge b - by^2 = 0 \quad (y \neq 0)$

$b = by^2 \longrightarrow y^2 = 1$

$y = \pm 1$

los puntos criticos son:

$(0,1) \wedge (0,-1)$

Caso 3) $y = 0 \quad a - ax^2 = 0$

$x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$

los puntos criticos son:

$(1,0) \wedge (-1,0)$

Caso 4) $a - ax^2 - by^2 = 0 \quad b - ax^2 - by^2 = 0$

Si $a \neq b \longrightarrow$ no hay solucion

$$\underbrace{\text{Si } a = b \longrightarrow x^2 + y^2 = 1}_{\text{pero es infactible por enunciado !}}$$

buscamos hessiana!

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-(x^2+y^2)}(a+2ax^4-5ax^2+2bx^2y^2-by^2)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{-(x^2+y^2)}(b+2by^4-5by^2+2ax^2y^2-ax^3)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2-a+by^2-b)$

↳ esto gracias a que es clase C^2 por ser combinacion de polinomio con exponencial!

Asi:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

→ Para clasificar los puntos, analizamos la hessiana punto por punto!

1] punto : $(0,0)$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

Como se tiene :

$$|H(0,0)| = 4ab > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a > 0$$

$\therefore (0,0)$ es mínimo local.

2] puntos : $(0,1) \wedge (0,-1)$

↳ $H(0,1) = H(0,-1)$, por lo que basta analizar uno.

$$H(0,1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1}(a-b) & 0 \\ 0 & -4be^{-1} \end{pmatrix}$$

Calculando determinante :

$$|H(0,1)| = 2e^{-1}(a-b) - 4be^{-1}$$

↳ Tenemos 2 casos

Caso 1: $a \leq b$.

$$|H(0,1)| > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-1}(a-b) < 0$$

$\therefore$ $(0,1) \wedge (0,-1)$ Son max.

Caso 2: $b \leq a$

$$|H(0,1)| < 0$$

$\therefore$ $(0,1) \wedge (0,-1)$ Son punto silla.

3| Puntos: $(1,0) \wedge (-1,0)$

↳ basta analizar uno ya que $H(1,0) = H(-1,0)$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -4ae^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1}(b-a) \end{pmatrix}$$

$$|H(1,0)| = -4ae^{-1} \cdot 2e^{-1}(b-a)$$

↳ nuevamente, hay que ponernos en casos!

Caso 1: $b \leq a$

$|H(1,0)| > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4ae^{-1} < 0$

$\therefore (1,0) \wedge (-1,0)$ Son maximo.

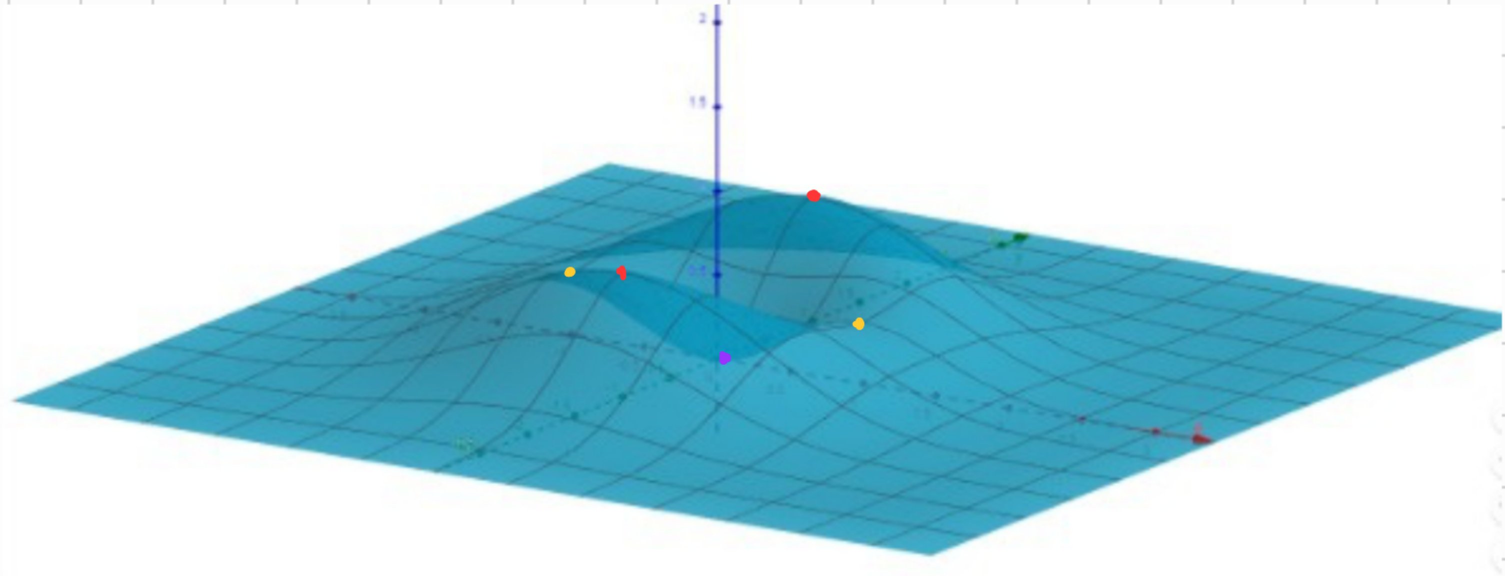
Caso 2 : $a \leq b$.

$|H(1,0)| < 0$

$\therefore (1,0) \wedge (-1,0)$ Son punto silla.

dejare los graficos para los 2 casos analizados, asi pueden comparar.

Caso 1 : $a \leq b \qquad (a = 1 \wedge b = 2)$

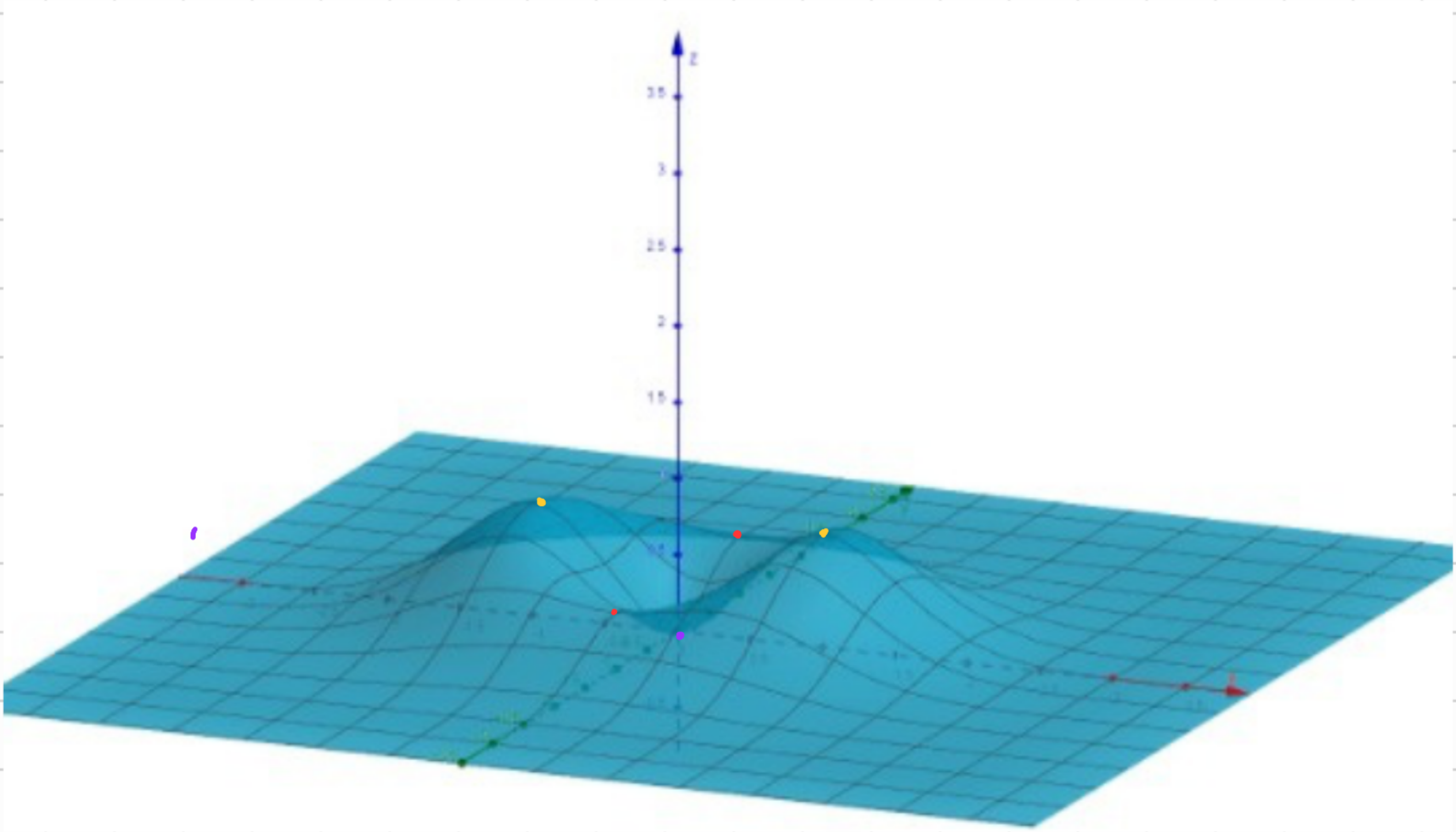


$(0,1) \wedge (0,-1)$ maximos locales

$(1,0) \wedge (-1,0)$ pto silla

$(0,0)$ minimo local.

Caso 2: $b \leq a$ $(a = 2 \wedge b = 1)$



$(0,1) \wedge (0,-1)$ ptos silla.
$(1,0) \wedge (-1,0)$ maximos locales
$(0,0)$ minimo local.

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

(a) Encuentre los puntos críticos de $f(x,y)$ y determine si son mínimos locales, máximos locales o puntos silla.

(b) Demuestre que:

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$$

(c) Concluya que la función alcanza su máximo y mínimo, calcúlelos.

nota: me saltare la explicacion detallada de cada caso (salvo en partes especificas) ya que la mayoria son iguales al ejercicio anterior.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-x^2-y^2} - 2x^2ye^{-x^2-y^2} \\ xe^{-x^2-y^2} - 2y^2xe^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) \overset{!}{=} 0$$

$$ye^{-x^2-y^2} - 2x^2ye^{-x^2-y^2} = 0$$
$$xe^{-x^2-y^2} - 2y^2xe^{-x^2-y^2} = 0$$

Simplificando se obtiene el sig sistema a resolver:

$$\to \quad y - 2x^2y = 0 \quad (1)$$
$$x - 2y^2x = 0 \quad (2)$$

↳ no se puede resolver! hay que ponerse en casos.

de (1) se tiene:

$$y(1-2x^2)=0$$

Caso 1. $y=0$

luego, por (2) $x-2(0)^2x=0 \rightarrow x=0$

$$\boxed{\text{punto critico } 1 = (0,0)}$$

Caso 2. $(1-2x^2)=0 \longrightarrow x^2 = 1/2$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Remplazando en (2):

- $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2y^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$1-2y^2=0 \longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se obtienen 2ptos criticos:}\\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}}$$

$\cdot \; x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2y^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-1 + 2y^2 = 0 \longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\text{Se obtienen 2ptos criticos :} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$\longrightarrow$ Resumiendo :

los ptos. criticos encontrados son:

$Pc1 : (0,0)$

$Pc2 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$Pc3 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$Pc4 : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$Pc5 : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

los clasificamos!

↳ clasificare los 2primeros! los demas son analogos:

buscamos hessiana

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6xy\,e^{-x^2-y^2} + 4x^3 y e^{-x^2-y^2}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy\,e^{-x^2-y^2} + 2y^3 x\,e^{-x^2-y^2}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ → por ser exp. con polinomio.

$$= e^{-(x^2-y^2)} \cdot (1 - 2y^2 - 2x^2 + 4x^2y^2)$$

↳ evaluamos punto a punto!

$\underline{(0,0)}$ $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos valores propios :

$|H(0,0) - \lambda I| = 0$

$\rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \wedge \quad \lambda^2 = -1$

$\therefore (0,0)$ es punto silla!

$\underline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$

$|H(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) - \lambda I| = 0$

$\rightarrow \begin{vmatrix} -2e^{-1} - \lambda & 0 \\ 0 & -2e^{-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

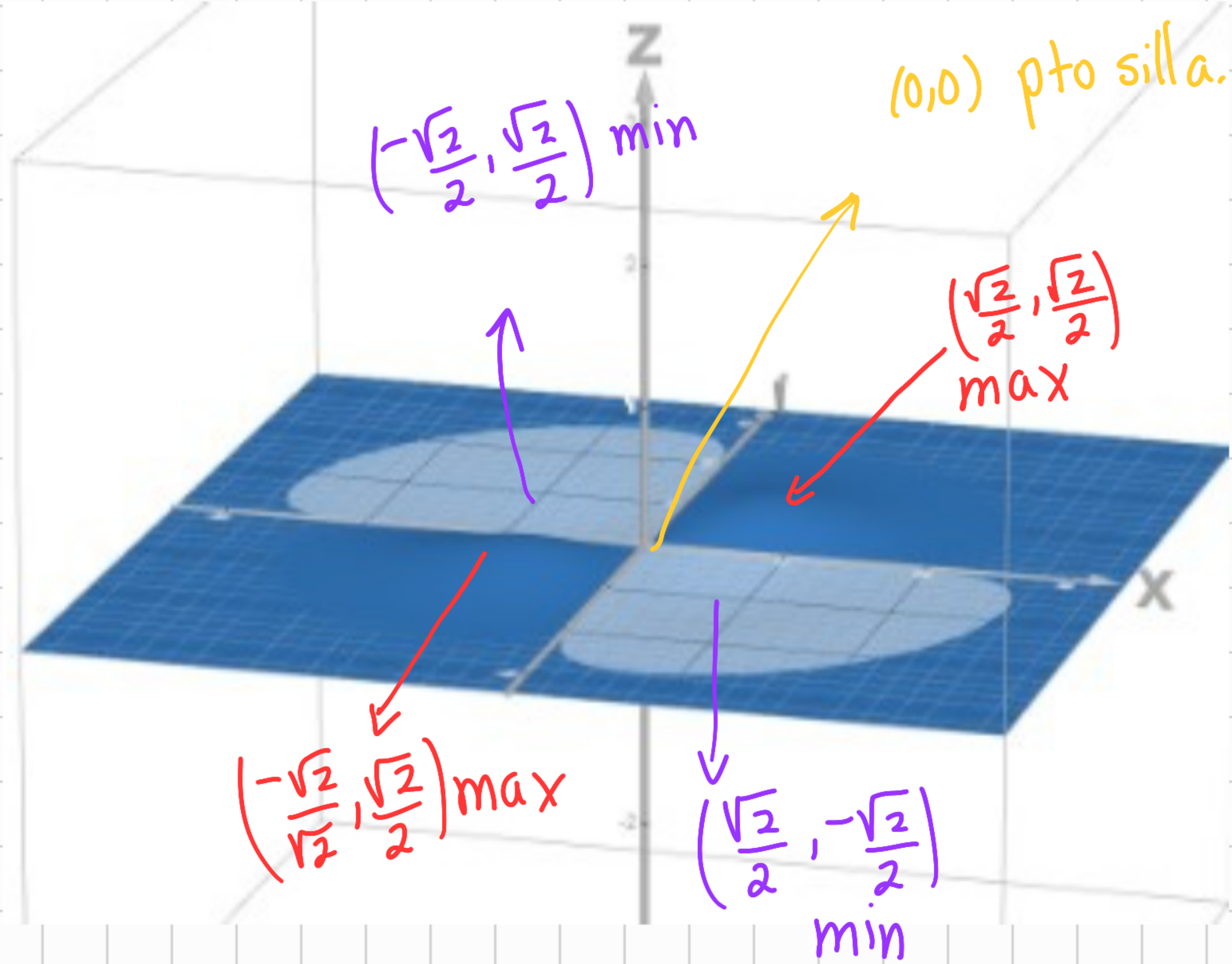
$(-2e^{-1} - \lambda)^2 = 0 \rightarrow -2e^{-1} - \lambda = 0$

$\lambda_{1,2} = -2e^{-1} < 0$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es max local

$\boxtimes$

Por si quieren revisar, la función es la siguiente!



b. pdq:

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$$

Trabajaremos acotando la expresion!

$$0 \leq |xy e^{-x^2-y^2}| = |xy| e^{-x^2-y^2}$$

$2|xy| < x^2+y^2$

$$\leq \frac{x^2+y^2}{2} e^{-x^2-y^2}$$

$$\leq (x^2+y^2) e^{-x^2-}$$

luego tendremos que:

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} (x^2+y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} = 0$$

ya que es de la forma:

$$\lim_{x \to \infty} x e^{-x}$$

finalmente por sandwich se concluye:

C. Se tiene que:

- $(0,0) \longrightarrow$ pto silla.
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow$ maximo.
- $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow$ maximo.

· $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow$ minimo.

· $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow$ minimo.

Como se tiene que:

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$$

la funcion se estabiliza en los extremos

$\therefore \ \exists M \in \mathbb{R}^2$ tq

$f(M) > f(A) \quad \forall A \in \mathbb{R}^2$

$\wedge \ \exists m \in \mathbb{R}^2$ tq

$f(m) < f(B) \quad \forall B \in \mathbb{R}^2$

por lo que, algun maximo y minimo local, corresponden a maximo y minimo global, como en este caso los min y max son simetricos

$\therefore \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Son min. global

y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \wedge \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Son max global.

Suerte en Su estudio!

y no olviden descansar

 Animo!

P5. Encuentre los puntos criticos de la funcion $f(x, y)$ y clasifiquelos segun corresponda.

$$f(x, y) = y^2 + cos(x + y)$$

la funcion alcanza minimo o maximo global en $\mathbb{R}^2$?

→ Aplicando condicion de primer orden

$$\nabla f = 0$$

→ Calculamos gradiente

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{Sen}(x+y)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - \operatorname{Sen}(x+y)$

obtenemos asi el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -\operatorname{Sen}(x+y) = 0 & (1) \\ 2y - \operatorname{Sen}(x+y) = 0 & (2) \end{cases}$$

remplazando (1) en (2)

$$y = 0$$

luego, de (1)

$$\operatorname{Sen}(x) = 0$$

Como Seno es funcion periódica

$$X = K\pi \qquad K \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ los puntos criticos son $(K\pi, 0)$

$\longrightarrow$ Clasificamos ptos criticos con criterio de 2do orden (hessiana)

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+y)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - \cos(x+y)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos(x+y)$

$\hookrightarrow$ schwartz pues f es C^∞

$\longrightarrow$ Armamos hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & 2-\cos(x+y) \end{bmatrix}$$

al evaluar en $(k\pi, 0)$ la hessiana Tomara valores distintos segun si k es par o impar!

→ evaluando hessiana:

$$H_f(k\pi,0) = \begin{bmatrix} -(-1)^k & -(-1)^k \\ -(-1)^k & 2-(-1)^k \end{bmatrix}$$

→ nos separamos en casos:

- Caso 1 $\quad$ K par

$$H_f(K\pi,0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando criterio del determinante

$$\det(H_f(K\pi,0)) = -2$$

como det es negativo

$\therefore$ $(K\pi, 0)$ con K par es punto silla

• Caso 2 k impar

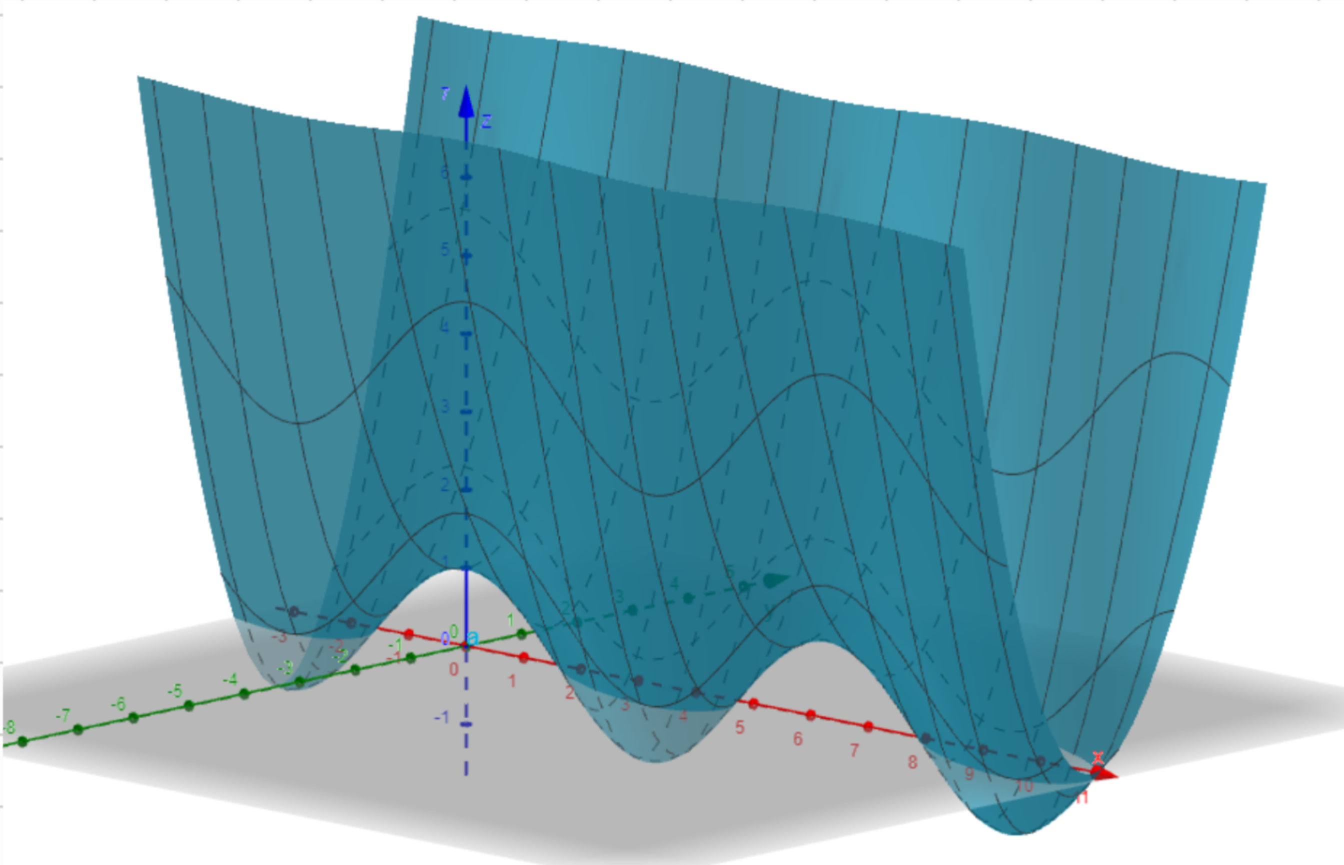
$$H_f(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos:

- $\det(H_f(k\pi,0)) = 2 > 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 > 0$

$\therefore$ $(k\pi, 0)$ con k impar es min. local.

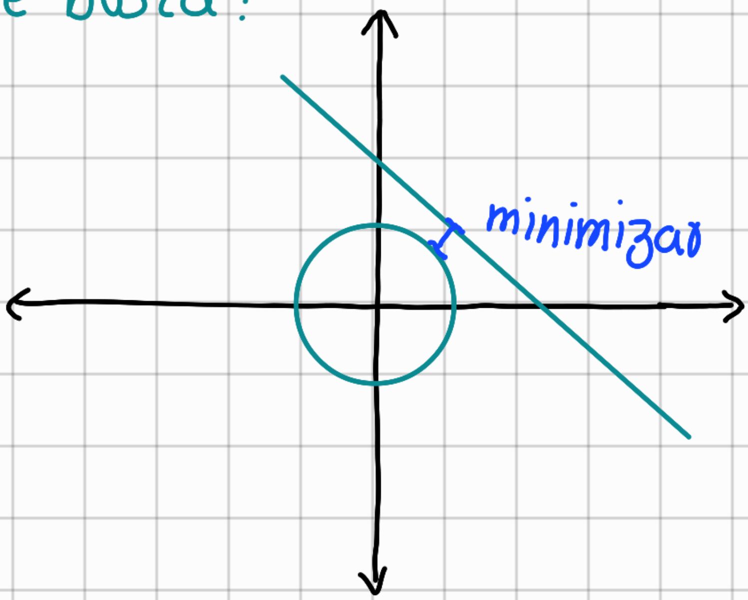
$\longrightarrow$ les dejo el grafico para comprobacion visual.



P6. Encuentre el valor de la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 2$.
Hint: Considere la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^2$ como una función de cuatro variables.

→ Primero modelamos el problema.

¿Que se busca?



Tomamos 2 puntos convenientes, sea:

- $(x_1, y_1) \in$ a la circunferencia.
- $(x_2, y_2) \in$ a la recta.

la distancia vendra dada por

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

luego, el problema sera:

$$\min \quad \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$\text{s.a} \quad x_1^2+y_1^2=1$$
$$x_2+y_2=2$$

notamos que podemos trabajar con el problema equivalente:

4zz

$$\min \quad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$\text{s.a} \quad x_1^2+y_1^2=1$$
$$x_2+y_2=2$$

pues la raiz es creciente!
(Trabajaremos con el problema equivalente ya que es mas sencillo)

21 $\rightarrow$ definimos

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$g_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1^2+y_1^2=1$$
$$g_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_2+y_2=2$$

→ Aplicamos lagrange:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2.$$

→ Calculamos cada gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \partial f/\partial y_1 \\ \partial f/\partial y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Remplazando

$$\begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ Esto nos da 4 ecuaciones! a las que se suman las ecuaciones g_1 y g_2 dando un sistema 6x6

$\longrightarrow$ nos queda el Siguiente sistema:

1) $2(x_1 - x_2) = 2\lambda_1 x_1$

2) $-2(x_1 - x_2) = \lambda_2$

3) $2(y_1 - y_2) = 2\lambda_1 y_1$

4) $-2(y_1 - y_2) = \lambda_2$

5) $x_1^2 + y_1^2 = 1$

6) $x_2 + y_2 = 2$

$\hookrightarrow$ el Sistema posee solucion!
(6 incognitas, 6 ecuaciones)

[prop] resolver el sistema!

Se obtiene

$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad y_1 = x_1$

$x_2 = 1$ $\qquad y_2 = 1$

Se tiene entonces

$$(x_2, y_2) = (1, 1)$$

pero 2 opciones para (x_1, y_1) !

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

↳ evaluamos ambas opciones en la distancia para hallar la menor

1) $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

2) $$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

∴ los puntos que minimizan la distancia son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \wedge (1, 1)$$

P7. Encuentre los puntos máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y, z) = 4y - 2z$$

en la región definida como la intersección del plano $2x - y - z = 2$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

el problema se modela como

$$\min \quad 4y - 2z$$

$$\text{s.a} \quad 2x - y - z = 2$$

$$x^2 + y^2 - 1$$

→ definimos funciones auxiliares:

$$f(x, y, z) = 4y - 2z$$

$$g_1(x, y, z) = 2x - y - z - 2$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$$

→ Aplicamos condicion de lagrange:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

↪ Calculamos cada gradiente:

- $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Remplazando:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ A esto, le sumamos las ec de g_1 y g_2, lo cual nos da el siguiente sistema:

1. $0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x$
2. $4 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 y$
3. $-2 = -\lambda_1$
4. $2x - y - z - 2 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

[prop] Resolver el sistema:

Se obtienen los siguientes puntos:

- $(x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2-\frac{7}{\sqrt{13}}\right)$

- $(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}}-2\right)$

$\longrightarrow$ para saber cual es max y cual min evaluamos en la funcion!

1. $f(x_1, y_1, z_1) = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}}$

2. $f(x_2, y_2, z_2) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}}$

$\therefore$ Se tendra que:

$(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow$ maximo

$(x_2, y_2, z_2) \longrightarrow$ minimo

P8. Considere la funcion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2+y^2)$$

Encuentre los valores minimos y maximos de la funcion sobre la region R definida por:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

↳ nos dividiremos en 2 casos.

1. puntos "al interior" ($x^2+y^2 \leq 1$)
2. puntos "en la frontera" ($x^2+y^2=1$)

Parte 1: puntos al "interior"

↳ Se trabaja como opti sin restriccion

⟶ Condicion de primer orden

$$\nabla f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}(x^2+y^2) + 2xe^{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}(x^2+y^2) + 2ye^{x-y}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2+y^2)+2xe^{x-y} \\ -e^{x-y}(x^2+y^2)+2ye^{x-y} \end{pmatrix}$$

→ Se tendra el sistema:

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2+y^2)+2xe^{x-y} = 0 \\ e^{x-y}(x^2+y^2)+2ye^{x-y} = 0 \end{cases}$$

Como $e^{x-y} \neq 0$, se tendra

$$\begin{cases} (x^2+y^2)+2x = 0 & (1) \\ -(x^2+y^2)+2y = 0 & (2) \end{cases}$$

haciendo (1) + (2)

$$2x + 2y = 0$$

$$x + y = 0$$

$$x = -y$$

Remplazando en (1)

$$(-y)^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot e^{x-y} = 0$$

$$2y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-1) = 0$$

Caso 1 $\quad y = 0$

como $x = -y \longrightarrow x = 0$

$\therefore$ el punto critico es

$p_1 = (0, 0)$

Caso 2 $\quad y - 1 = 0 \longrightarrow y = 1$

como $x = -y \longrightarrow x = -1$

$\therefore$ el punto critico es

$p_2 = (-1, 1)$

$\longrightarrow$ Verificamos que los puntos cumplan la restriccion:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$\boxed{p_1 = (0,0)}$

$$x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \leq 1 \quad \checkmark$$

$\boxed{p_2 = (-1, 1)}$

$$x^2 + y^2 = (-1)^2 + (1)^2 = 2 > 1 \quad X$$

$\therefore$ el unico punto que cumple la restriccion sera

$$p_1 = (0,0)$$

$\longrightarrow$ Clasificamos usando hessiana

$$H = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2+y^2+4x+2) & -e^{x-y}(x^2+y^2+2x-2y) \\ -e^{x-y}(x^2+y^2+2x-2y) & e^{x-y}(x^2+y^2-4y+2) \end{pmatrix}$$

evaluando en $p_1=(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$|H| = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

$\therefore$ el punto $(0,0)$ es minimo local

Parte 2: puntos "en la frontera"

↳ Se trabaja con lagrange

→ definimos las funciones

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2+y^2)$$

$$g(x,y) = x^2+y^2-1$$

→ remplazar en el lagrange

$$L = f - \lambda g$$

$$L(x,y,\lambda) = e^{x-y}(x^2+y^2) - \lambda(x^2+y^2-1)$$

→ Aplicar condicion

$$\nabla L = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^{x-y}(x^2+y^2+2x) - 2\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = e^{x-y}(2y-x^2-y^2) - 2\lambda y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2-1)$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2+y^2+2x) - 2\lambda x \\ e^{x-y}(2y-x^2-y^2) - 2\lambda y \\ -(x^2+y^2-1) \end{pmatrix}$$

lo que lleva al sistema ($\nabla L = 0$)

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2+y^2+2x) - 2\lambda x = 0 & (1) \\ e^{x-y}(2y-x^2-y^2) - 2\lambda y = 0 & (2) \\ -(x^2+y^2-1) = 0 & (3) \end{cases}$$

hacemos (1) + (2)

$$e^{x-y}(2x+2y) - 2\lambda(x+y) = 0$$

$$e^{x-y}(x+y) - \lambda(x+y) = 0$$

$$(x+y)(e^{x-y} - \lambda) = 0$$

$\hookrightarrow$ Aqui hay que dividirnos por casos

Caso 1 $(e^{x-y} - \lambda) = 0$

$$e^{x-y} = \lambda$$

remplazando en (1) obtenemos

$$x^2 + y^2 = 0$$

Pero de (3) tenemos

$$x^2 + y^2 = 1$$

Como no existe (x, y) que cumpla ambas ecuaciones a la vez

$\therefore$ no hay puntos criticos para este caso!

Caso 2 $(x + y) = 0$

$$x = -y$$

remplazando en (3)

$$(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$(-y)^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $x = -y$, los puntos criticos son

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como tenemos una funcion continua Sobre un compacto

$\therefore$ existe maximo y minimo

↳ Basta con evaluar para saber

- $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}$

- $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\sqrt{2}}$

$\cdot\ f(0,0) = 0$

$\therefore\ (0,0)$ es mínimo y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es

máximo

P9. Sean a, b, c angulos interiores de un triangulo, demuestre que:

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{c}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

Util: Recordar el resultado de la sumatoria de los angulos interiores de un triangulo cualquiera.

↳ podemos abordarlo como un problema de optimizacion !

tal que si, al maximizar

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)$$

aun esta acotado por $\frac{1}{8}$, entonces se tendra para todo trio a, b, c de angulos interiores de un triangulo

⟶ definiendo

$$x = \frac{a}{2} \qquad y = \frac{b}{2} \qquad z = \frac{c}{2}$$

Tendremos el problema equivalente

$$\max \quad \operatorname{Sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$$

$$\text{s.a} \quad x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0$$

definiendo las funciones

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z)$$

$$g(x,y,z) = x + y + z - \frac{\pi}{2}$$

→ planteamos lagrange

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z) \\ \operatorname{sen}(x)\cos(y)\operatorname{sen}(z) \\ \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\cos(z) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como x, y, z son los angulos interiores de un triangulo, los casos

$$x = 0 \lor y = 0 \lor z = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \lor y = \frac{\pi}{2} \lor z = \frac{\pi}{2}$$

no son factibles, pues se perderia la figura, asi

$$x, y, z \in (0, \pi/2)$$

Ademas, se tendra el sistema

1. $\cos(x)\,\mathrm{Sen}(y)\,\mathrm{sen}(z) + \lambda = 0$

2. $\mathrm{Sen}(x)\cos(y)\,\mathrm{sen}(z) + \lambda = 0$

3. $\mathrm{Sen}(x)\,\mathrm{Sen}(y)\cos(z) + \lambda = 0$

4. $x + y + z - \pi/2 = 0$

[prop] resolver el sistema!

Se obtiene:

$$(x, y, z) = (\pi/6, \pi/6, \pi/6)$$

luego

$$\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$$

Como el maximo sigue cumpliendo la cota

$\therefore$ Se tiene lo pedido!

P10. Se tiene el siguiente molde para hacer cajas: Tal que el largo es 36cm y el ancho 27cm.

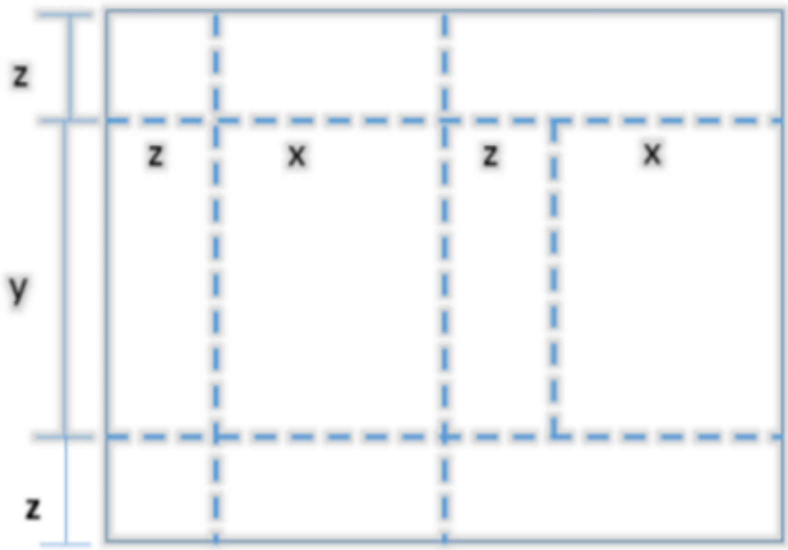


Figura 1: Molde caja

Cuales deben ser los parametros para que la caja sea lo mas grande posible?

$\longrightarrow$ modelamos el problema

- Vemos que lo que se busca maximizar es el volumen, es decir

$$V = xyz$$

- el largo debe ser 36 cm.

$$2z + 2x = 36$$

- el ancho debe ser 27cm

$$y + 2z = 27$$

→ el problema queda:

max $\quad xyz$

s.a $\quad 2z + 2x - 36 = 0$

$\quad y + 2z - 27 = 0$

→ utilizando funciones auxiliares:

$f(x,y,z) = xyz$

$g_1(x,y,z) = 2z + 2x - 36$

$g_2(x,y,z) = y + 2z - 27 = 0$

→ planteando lagrange:

$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0$

↳ Calculamos gradientes

• $\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

- $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

→ Remplazando :

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ Sumando a esto g_1 y g_2 obtenemos el Sistema:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda_1 = 0 & (1) \\ xz + \lambda_2 = 0 & (2) \\ xy + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (3) \\ 2z + 2x - 36 = 0 & (4) \\ y + 2z - 27 = 0 & (5) \end{cases}$$

[prop] Resolver el Sistema

Se obtienen 2ptos criticos :

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{15-3\sqrt{13}}{2}, 6-3\sqrt{13}, \frac{21+3\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{15+3\sqrt{13}}{2}, 6+3\sqrt{13}, \frac{21-3\sqrt{13}}{2} \right)$$

notamos que

$x_1 > 0 \qquad y_1 < 0 \qquad z_1 > 0$

$\Rightarrow$ el volumen generado por (x_1, y_1, z_1) es negativo !

por lo que se descarta.

por otro lado :

$x_2 > 0 \qquad y_2 > 0 \qquad z_2 > 0$

$\therefore$ el volumen maximo sera con (x_2, y_2, z_2)

P11. Consideremos la integral doble

$$\iint_R x\sin(xy)\,dA$$

sobre la región

$$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 1 \leq y \leq 2\}$$

1. Exprese la integral doble de dos maneras diferentes.
2. Analice si evaluar la integral doble de una forma es más fácil que la otra y por qué.
3. Evalúe la integral.

→ Se tienen los limites de integracion

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$1 \leq y \leq 2$$

1. basta con expresar primero dxdy y luego dydx

I. $$\iint_R x\,\mathrm{sen}(xy)\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^{2} x\,\mathrm{sen}(xy)\,dy\,dx$$

II $$\iint_R x\,\mathrm{sen}(xy)\,dA = \int_1^{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(xy)\,dx\,dy$$

2. notamos que, para la primera integral, basta tomar

$$u = xy \qquad du = x\,dy$$

$$\int_0^{\pi}\int_1^{2} x\,sen(xy)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_x^{2x} Sen(u)\,du\,dx$$

Quedando al interior una integral de la forma

$$\int senu\ du$$

Por el contrario, si integramos c/r a X primero, se requiere hacer una integración por parte:

$$u = x \longrightarrow du\ dx$$

$$dv = Sen(xy)dx \longrightarrow V = -\frac{\cos(xy)}{y}$$

$$\int_1^2\int_0^{\pi} x sen(xy)dxdy = \int_1^2\left[-\frac{\cos(xy)}{y}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{y}\int_0^{\pi}\cos(xy)dx\right]$$

Que es claramente la integral mas facil de resolver.

3. Calculamos de la primera forma.

$$\iint_R x\,\text{sen}(xy)\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^{2} x\ \text{sen}(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\int_x^{2x} \text{sen}(u)\,du\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left[-\cos u\Big|_x^{2x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi}(-\cos 2x + \cos x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 \quad //$$

P12. Calcule la integral:

$$\int\int_D e^{y^4}\,dA$$

Donde D es la region pintada que se muestra en la siguiente figura:

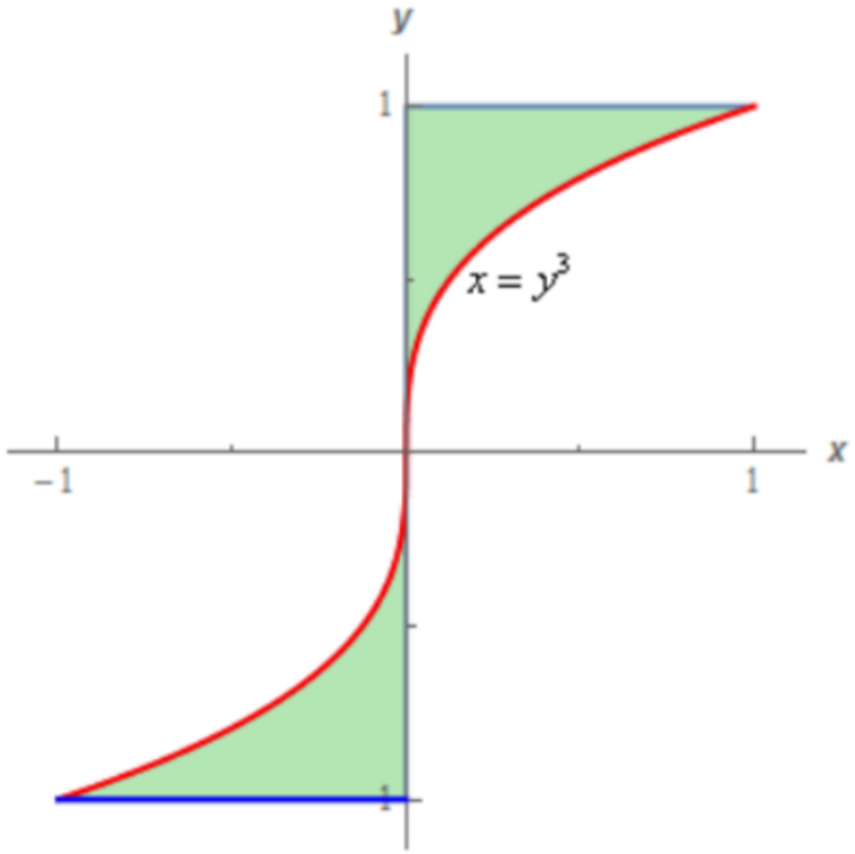
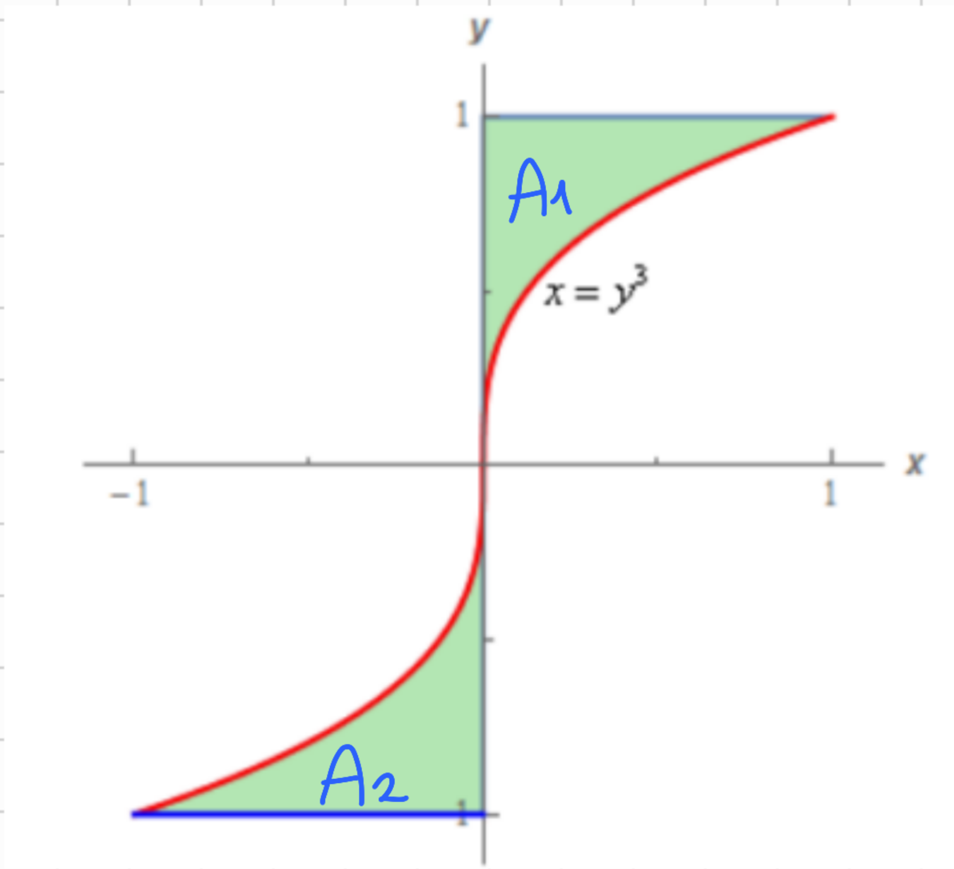


Figura 2: Grafico p2

Tenemos que, para la region D



notamos

$D = A_1 \dot{\cup} A_2$

union disjunta

$$\Rightarrow \iint_D e^{y^4}\,dA = \iint_{A_1} e^{y^4}\,dA + \iint_{A_2} e^{y^4}\,dA$$

1. definimos limites de integracion:

- Region A_1

Si $0 \le y \le 1 \longrightarrow 0 \le X \le y^3$

Alternativa:

Si $0 \le X \le 1 \longrightarrow \sqrt[3]{X} \le y \le 1.$

- Region A_2

Si $-1 \le y \le 0 \longrightarrow y^3 \le X \le 0$

Alternativa:

Si $-1 \le X \le 0 \longrightarrow -1 \le y \le \sqrt[3]{X}$

Remplazando

$$\iint_D e^{y^4}\,dA = \int_0^1 \int_0^{y^3} e^{y^4}\,dx\,dy + \int_{-1}^{0} \int_{y^3}^{0} e^{y^4}\,dx\,dy$$

desarrollando :

$$= \int_0^1 e^{y^4}\, x \Big|_0^{y^3} dx + \int_0^1 e^{y^4}\, x \Big|_{y^3}^{0} dy$$

$$= \int_0^1 e^{y^4} \cdot y^3\, dy + \int_0^1 -y^3 e^{y^4}\, dy$$

$$= \left(\frac{e^{y^4}}{4} \right) \Big|_0^1 + - \left(\frac{e^{y^4}}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}(e-1) - \frac{1}{4}(1-e)$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

//

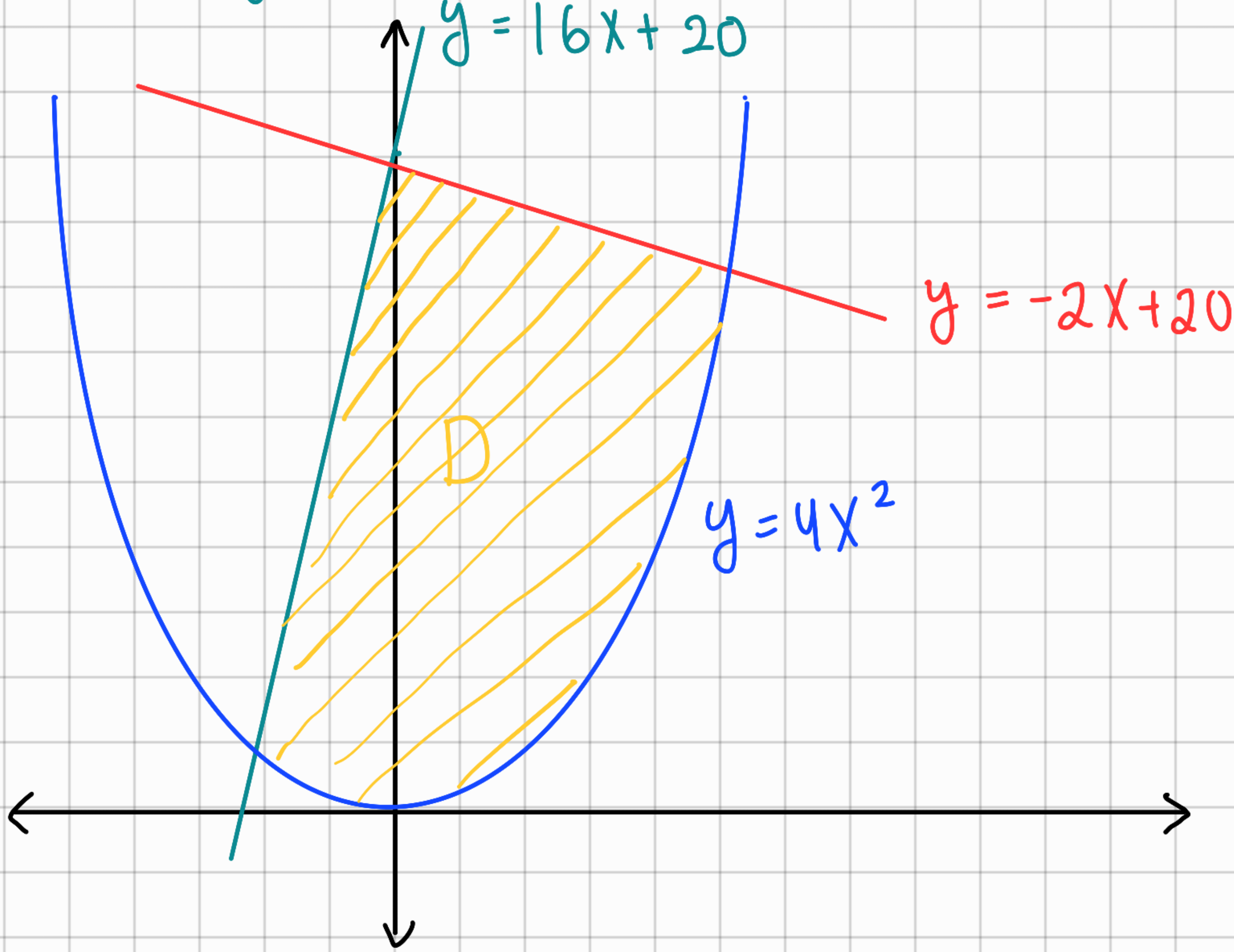
P13. La regio D en el plano xy esta limitada por:

$$y = 16x + 20$$
$$y = -2x + 20$$
$$y = 4x^2$$

Calcule el area de la region D.

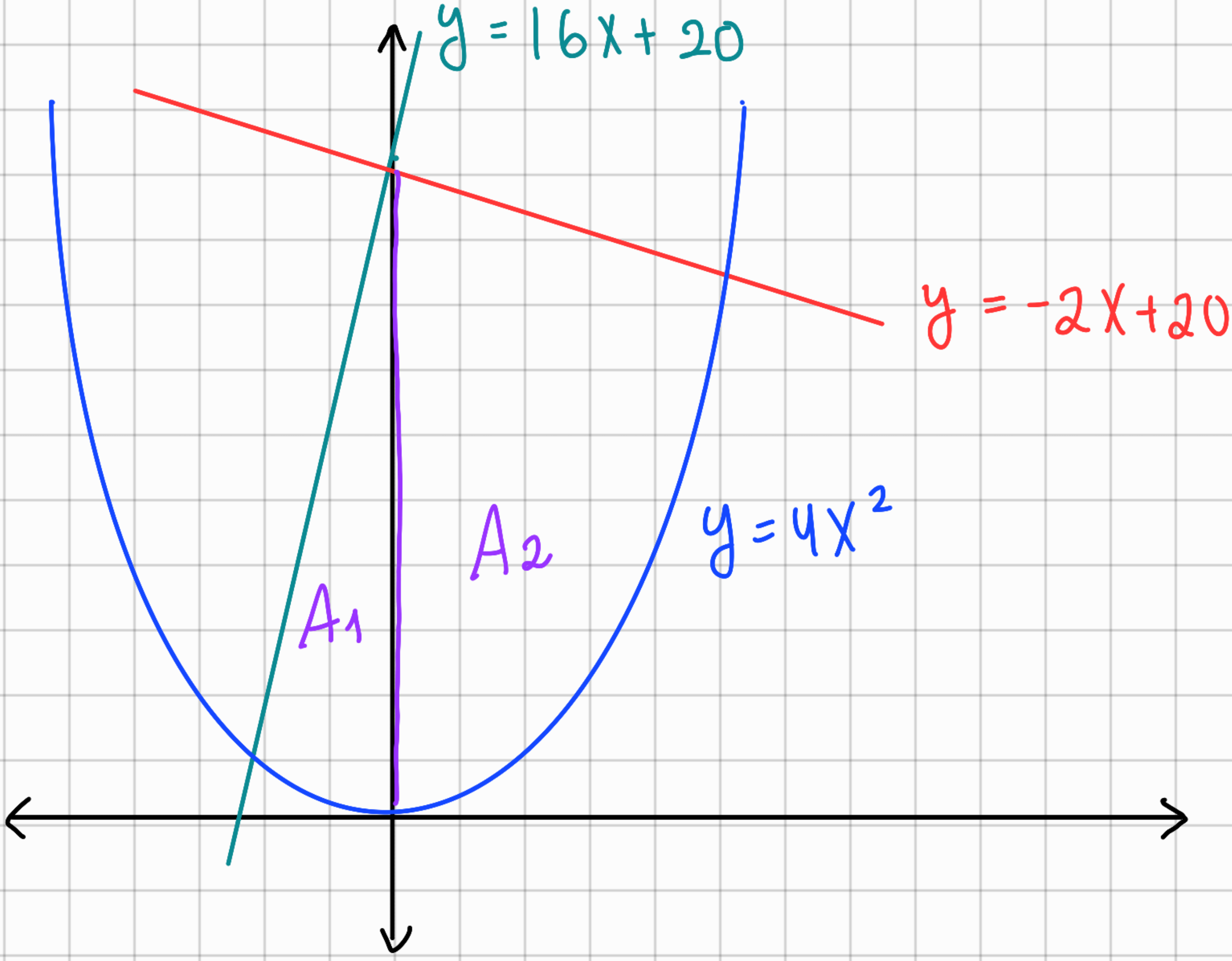
↪ notamos que la region D es de 2 dimensiones

Para facilitar ver las cotas, dibujamos la region D.



↪ el area naranja es la interseccion de las cotas y por lo tanto, el area de integracion.

notamos que hay que dividirnos en 2 Areas, ya que hay cotas superiores distintas!



Tendremos, Si dejamos y en funcion de x , x en funcion de constantes:

- Area 1

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$4x^2 \leq y \leq 16x + 20$$

- Area 2

$$0 \leq x \leq 2$$

$$4x^2 \leq y \leq -2x+20$$

finalmente

$$A = \int_D 1 = \int_{A1} 1 + \int_{A2} 1$$

Remplazando

$$A = \int_{-1}^{0}\int_{4x^2}^{16x+20} 1\, dy\, dx + \int_{0}^{2}\int_{4x^2}^{-2x+20} 1\, dy\, dx$$

[prop] Resolver integral.

Respuesta

$$A = 36$$

//

P14. Calcule las siguientes integrales usando Fubini:

(a)

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3} dxdy$$

(b)

$$\int_0^{\pi^2} \int_{\sqrt{y}}^{\pi} \frac{sen(x^2)}{x^2} y^{\frac{1}{2}} dxdy$$

a. $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3} dxdy$

Se tiene que

$$0 \leq y \leq 2 \qquad (1)$$

$$\frac{y}{2} \leq x \leq 1 \qquad (2)$$

$\longrightarrow$ Re ordenamos las cotas:

de (1)

$$0 \leq y \leq 2 \qquad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$\hookrightarrow$ $0 \leq \frac{y}{2}$

Remplazando en (2)

$$\boxed{0 \leq X \leq 1}$$

Ahora de (2)

$$\frac{y}{2} \leq X \leq 1 \qquad /\cdot 2$$

$$y \leq 2X \leq 2$$

↳ $y \leq 2X$

luego, remplazando en (1)

$$\boxed{0 \leq y \leq 2X}$$

Tenemos entonces las 2 nuevas cotas:

$$0 \leq X \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 2X$$

↳ Re-escribimos la integral con fubini.

$$\int_0^1 \int_0^{2x} y e^{x^3} \, dy \, dx$$

$\longrightarrow$ resolvemos :

$$\int_0^1 \int_0^{2x} y e^{x^3} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} e^{x^3} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x^2}{2} e^{x^3} dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 e^{x^3} dx$$

hacemos un cambio de variable.

$u = x^3$ $\qquad$ $du = 3x^2 dx$

$\hookrightarrow dx = \dfrac{du}{3x^2}$

luego

$$\int_0^1 2x^2 e^{x^3} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 e^u \, du$$

$$= \frac{2}{3}(e - 1)$$

//

b. $$\int_0^{\pi}\int_{\sqrt{y}}^{\pi} \frac{\operatorname{Sen}(x^2)}{x^2}\, y^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy$$

Tenemos las cotas:

$$0 \leq y \leq \pi^2 \qquad (1)$$

$$\sqrt{y} \leq x \leq \pi \qquad (2)$$

$\longrightarrow$ Re ordenamos las cotas.

de (1) tenemos

$$0 \leq y \leq \pi^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$0 \leq \sqrt{y} \leq \pi^2$$

$\hookrightarrow$ $0 \leq \sqrt{y}$

Remplazando en (2)

$$\boxed{0 \leq x \leq \pi}$$

de (2) tenemos

$$\sqrt{y} \leq x \leq \pi \qquad /(\ )^2$$

$$y \leq x^2 \leq \pi^2$$

$\hookrightarrow$ $y \leq x^2$

Remplazando en (1)

$$\boxed{0 \leq y \leq x^2}$$

Tenemos entonces las cotas:

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$0 \leq y \leq x^2$$

$\longrightarrow$ Remplazamos usando fubini:

$$\int_0^{x^2}\int_{\sqrt{y}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\, y^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\, y^{\frac{1}{2}}\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\left((x^2)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^2}\, x^3\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\pi} Sen(x^2)\, x\, dx$$

hacemos el cambio de variable

$$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$$

$$\frac{2}{3} \int_0^{\pi} sen(x^2)\, x\, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi^2} sen(u)\, du$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\cos(\pi^2) + \cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \cos(\pi^2)\right)$$

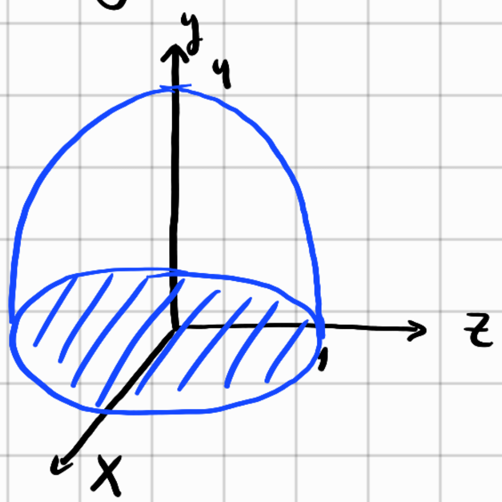
//

P15. Calcular el volumen de:

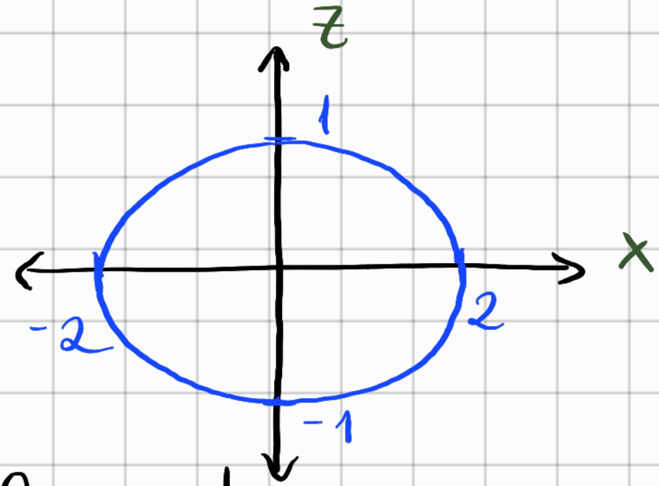
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \mid 0 \leq y \leq 4 - x^2 - 4z^2\right\}$$

• y es max en $x = z = 0 \longrightarrow y = 4$

el volumen sera de la siguiente forma:



→ Proyectando en el plano $x - z$:



en ese plano $y = 0$, por lo que se tiene la relacion

$$0 \leq 4 - x^2 - 4z^2$$

$$x^2 + 4z^2 \leq 4.$$

→ buscamos expresar z en funcion de x

Tomamos la igualdad

$$x^2 + 4z^2 = 4.$$

despejamos z

$$z = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

asi tendremos

$$-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

luego en $z=0$, obtenemos

$$-2 \leq x \leq 2$$

Sin olvidar que por enunciado teniamos

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 - 4z^2$$

el volumen, se expresara entonces como:

$$Vol(A) = \int_A 1$$

$$Vol(A) = \int_{-2}^{2} \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \int_{0}^{4-x^2-4z^2} dy\, dz\, dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} 4 - x^2 - 4z^2 \, dz \, dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{4}{3} z^3 \Big|_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{8}{3} \frac{(4-x^2)^{3/2}}{2^3} dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2} \, dx$$

[prop] Calcular la integral

$$V = 4\pi \qquad \blacksquare$$

P16. Un solido esta limitado por las superficies $z = x^2 - y^2$,el plano xy y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcule su volumen por doble integracion.

Tenemos las cotas

- plano $z = x^2 - y^2$
- plano xy $(z = 0)$
- plano $x = 1$
- plano $x = 3$

notamos que, en el eje z, tenemos

2cotas simplemente

$$z = x^2 - y^2$$

$$z = 0$$

Ademas, se tendra que la cota superior sera $z = x^2 - y^2$ y la inferior $z = 0$, es decir:

$$0 \leq z \leq x^2 - y^2$$

→ buscamos cotas para x e y

↪ x e y son maximos en $z=0$!

Proyectando en $z=0$

$$0 = x^2 - y^2$$

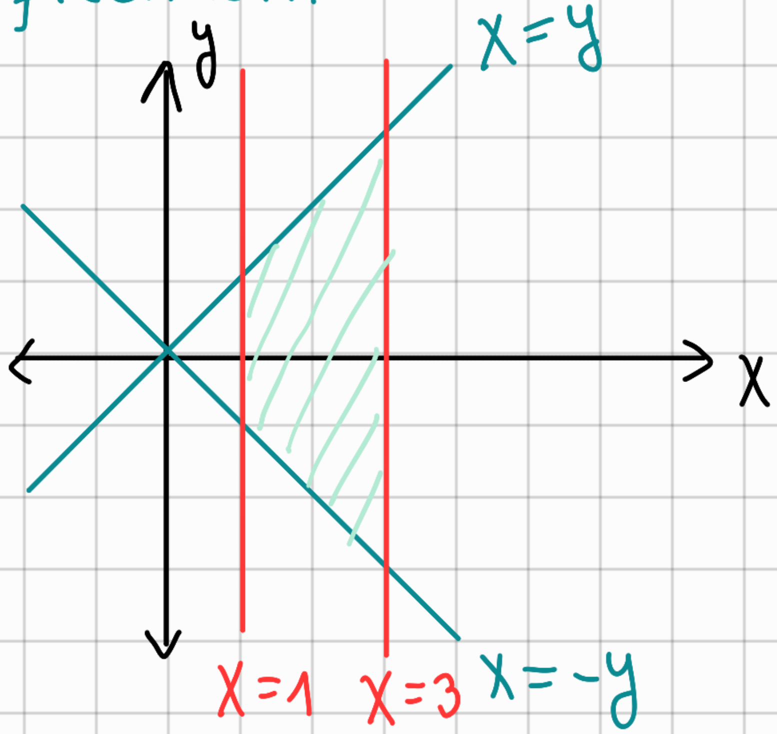
$$x = \pm y$$

Tenemos entonces 4 ecuaciones

$$x = 1 \quad \wedge \quad x = 3$$

$$x = y \quad \wedge \quad x = -y$$

Graficamente :



↳ dejamos y en funcion de x

$$-x \leq y \leq x$$

e x en funcion de ctes.

$$1 \leq x \leq 3$$

→ finalmente la integral sera:

$$V = \int_{1}^{3}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_{1}^{3}\int_{-x}^{x} x^2 - y \, dy \, dx$$

[prop] resolver la integral

Respuesta:

$$V = \frac{80}{3}$$

//